ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXIX

FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DES 100. GEBURTSTAGES EDUARD KUMMERS

MIT BRIEFEN AN SEINE MUTTER
UND AN LEOPOLD KRONECKER



HERAUSGEGEBEN VOM

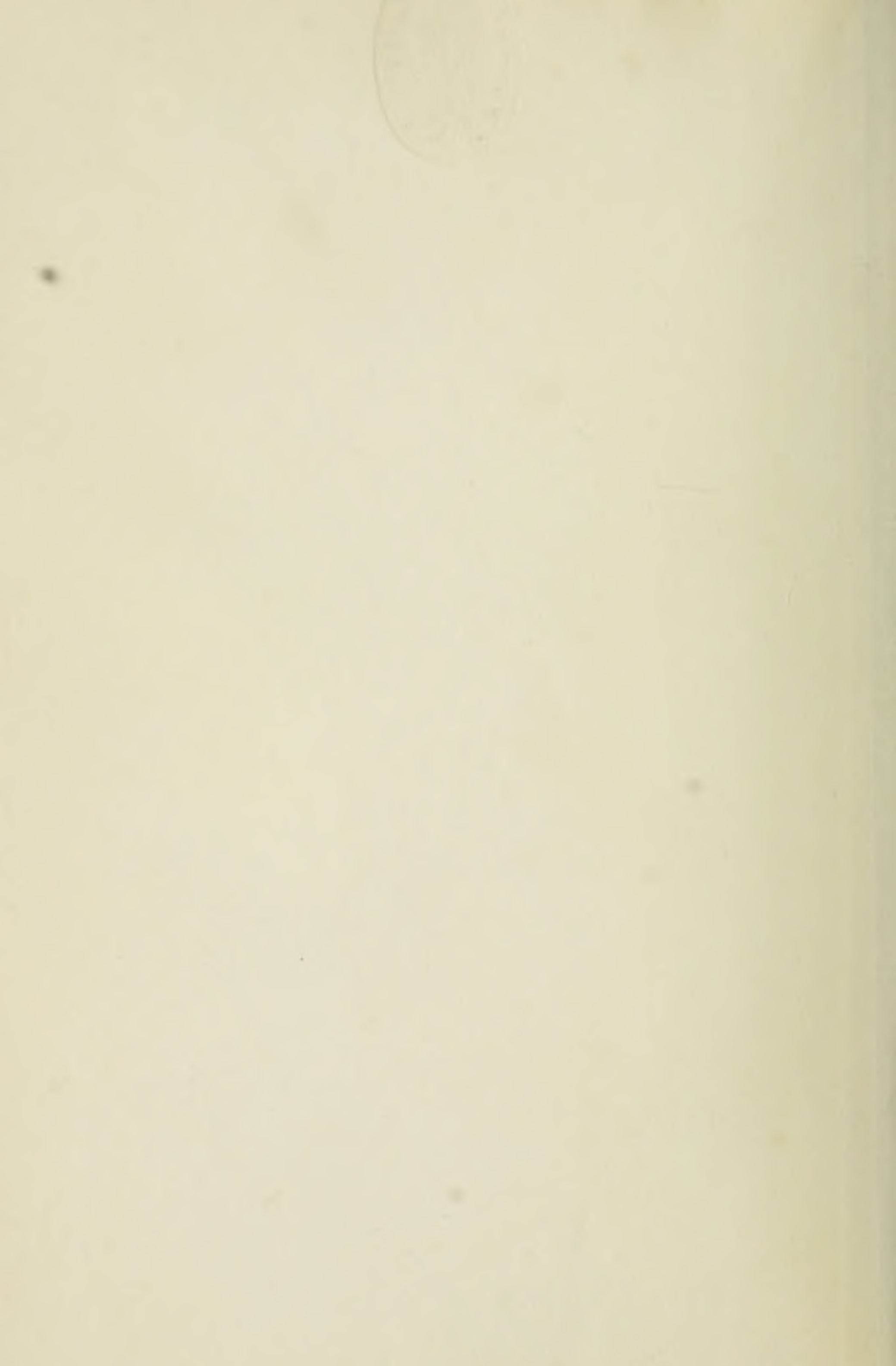
VORSTANDE DER BERLINER
MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

MIT EINEM BILDNIS E. KUMMERS

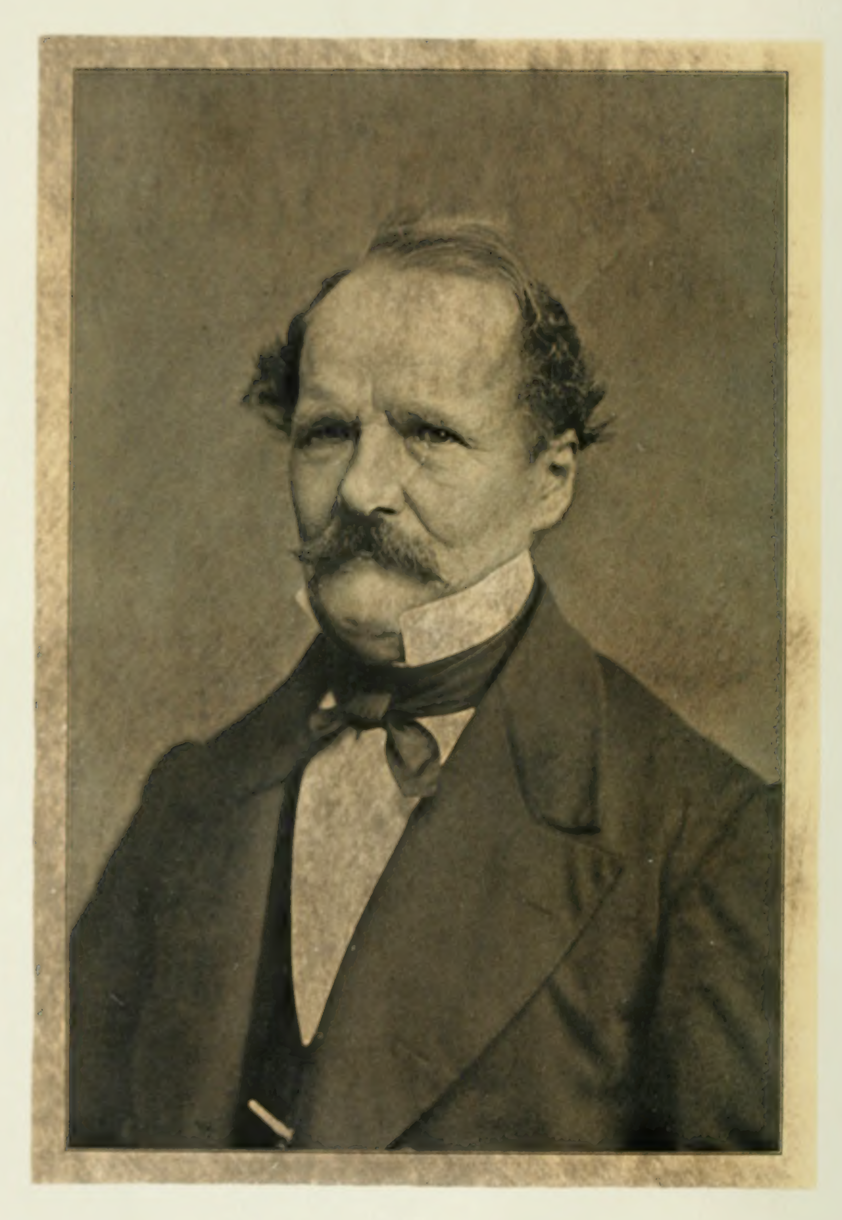
LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910








MARKERT & PETTERS
Buchhandlung
LEIPZIG



E. E. Kummer

(1875)

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXIX

FESTSCHRIFT

ZUR FEIER DES 100. GEBURTSTAGES

EDUARD KUMMERS

MIT BRIEFEN AN SEINE MUTTER
UND AN LEOPOLD KRONECKER

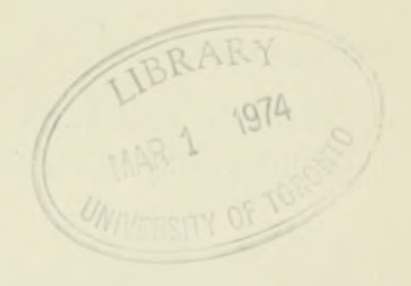
HERAUSGEGEBEN VOM

VORSTANDE DER BERLINER
MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

MIT EINEM BILDNIS E. KUMMERS



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910


LIBRARY
MAR 1 1974
UNIVERSITY OF TORONTO

VORREDE.

Die Berliner Mathematische Gesellschaft hat zur Feier des 100sten Geburtstages Eduard Kummers (29. Januar 1910) am Sonnabend den 8. Januar 1910 im großen Hörsaal des Physikalischen Instituts der hiesigen Universität eine Festsitzung veranstaltet. Herr Hensel übernahm die Festrede. Diese, als erste Gedächtnisrede großen Stiles, die zum Andenken des großen Berliner Mathematikers gehalten worden ist, gelangt hier zum Abdruck.

Hinzugekommen sind Briefe Kummers an seine Mutter und an Leopold Kronecker, die hier zum erstenmal mit gütiger Genehmigung ihrer Besitzer der Öffentlichkeit übergeben werden. Die Berliner Mathematische Gesellschaft sagt Frau Geheimrat Kummer und Herrn Geh. Justizrat Dr. Ernst Kronecker verbindlichsten Dank für die liebenswürdige Überlassung dieses Briefwechsels, der als kostbare Fundgrube für die Charakteristik des Menschen wie des Forschers bezeichnet werden muß.

Beigegeben ist ein Bildnis Kummers aus dem Jahre 1875, das aus einem Kabinettporträt des Photographen Ernst Milster-Berlin reproduziert worden ist.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung für ihr Entgegenkommen auf unsere und des Autors mannigfachen Wünsche den besten Dank auszusprechen.

Der Vorstand
der Berliner Mathematischen Gesellschaft:

E. Jahnke.

R. Güntsche. C. Färber.

INHALT.

Seite

K. Hensel, Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer . . . . 1—37

Briefe Ernst Eduard Kummers an seine Mutter . . . . 39—46

Briefe Ernst Eduard Kummers an Leopold Kronecker . . . . 46—107

Verehrte Damen und Herren!

Der heutige Vortrag über Ernst Eduard Kummer und sein Lebenswerk verdankt der Tatsache seine Entstehung, daß wir in den nächsten Tagen, am 29. Januar 1910, den hundertjährigen Geburtstag dieses großen Mannes feiern. Manchem unter uns wird es vielleicht wunderbar erscheinen, daß schon eine so lange Zeit seit seiner Geburt verstrichen ist, während uns seine Persönlichkeit und sein Werk noch so nahe stehen.

Mir selbst erscheint dies besonders in bezug auf seine Persönlichkeit merkwürdig: habe ich ihn doch noch gut und nahe gekannt von der Zeit an, als ich, ein achtzehnjähriger Student an der Berliner Universität, sein Schüler sein durfte, bis zu seinem Tode. Allerdings war Kummer damals ein siebzigjähriger Ehrfurcht gebietender Greis, und bei dem wärmsten Interesse für uns junge Leute war es nicht seine Art, uns einen Einblick in sein innerstes Leben und in seine eigene reiche Gedankenwelt zu gewähren, aber es war mir vergönnt, seinem besten und liebsten Freunde, seinem begeistertsten Schüler Leopold Kronecker nahe zu stehen, der schon ganz jung auf dem Liegnitzer Gymnasium zu seinen Füßen gesessen hatte und durch ihn für die Mathematik gewonnen worden war. Seit dieser Schulzeit erwuchs zwischen beiden Männern ein Freundschaftsverhältnis, wie es sich nur selten gleich innig, rein und ungetrübt durch so lange Zeit erhält. Von dieser Freundschaft legt eine Reihe von Briefen das schönste Zeugnis ab, welche Kummer in einer zwölfjährigen Trennungszeit an Kronecker gerichtet hat, und in denen er ihm in der bedeutsamsten Epoche seiner wissenschaftlichen Entwicklung fast von Monat zu Monat die Fortschritte der Erkenntnis berichtet, zu denen ihn sein Nachdenken geführt hat. In diesen Briefen, welche mir durch die Güte von Leopold Kroneckers ältestem Sohne, dem Geh. Justizrat Ernst Kronecker zugänglich wurden, konnte ich deutlich die innere Entwicklung der größten Gedanken Kummers verfolgen von den ersten arithmetischen Versuchen an durch Zweifel und Bedenken hindurch

bis zu dem wunderbaren Briefe vom 18. Oktober 1845, in welchem er mit gerechtem Stolze dem Freunde seine ganze gewaltige Theorie der idealen Zahlen in einer Reihe von lapidaren Sätzen vortrug, wie sie seitdem die Grundlage für die Entwicklung der modernen Zahlenlehre geworden ist.

In der Zeit, als ich Kronecker näher trat, waren beide Männer schon lange in Berlin vereinigt, aber obwohl die Jahre den Altersunterschied mehr hätten verwischen können, war die Pietät und Bewunderung des jüngeren Mannes für den älteren nur vertieft und verschönt worden. Es war Kronecker ein Bedürfnis, von der wissenschaftlichen Entwicklung, von dem festen edlen Charakter seines Freundes zu sprechen, und so durfte ich durch seine Vermittlung auch dem bewunderten Lehrer Kummer so nahe treten, wie dies wohl wenigen anderen meines Alters vergönnt gewesen ist.

Da mich auch meine eigene Neigung früh auf das Arbeitsgebiet Kummers hinführte, so nahm ich mit dankbarer Freude die Aufforderung der Berliner Mathematischen Gesellschaft an, in dieser Festsitzung ein Bild des Mannes zu entwerfen, dem wir und unsere Wissenschaft so vieles verdanken. Ich tat dies um so lieber, als ich auch als Leiter des Crelleschen Journales eine besondere Dankesschuld an Kummer abzutragen habe. Hat er doch vom zwölften bis zum hundertsten Bande dreiunddreißig größere und kleinere Abhandlungen in dieser Zeitschrift veröffentlicht, welche zusammengenommen fast drei ihrer Bände füllen würden und die einen ihrer schönsten Ruhmestitel bilden; und hat er doch vom Jahre 1856 bis 1880 den verdienstvollen Leiter des Journales, C. W. Borchardt, in seinem verantwortungsreichen Amte unterstützt.

Bei der Aufgabe, ein möglichst lebensvolles Bild von der Persönlichkeit Kummers zu gewinnen und Ihnen wiederzugeben, wurde ich in wirksamster Weise besonders durch seine verehrte Gattin, Frau Geheimrat Kummer, und seine Töchter, Frau Geheimrat Schwarz und Frl. Emma Kummer, unterstützt. Durch ihre Güte konnte ich die Briefe Kummers an seine Mutter lesen, welche in rührender Weise sein innerstes Wesen enthüllen.

Von diesen ihm nächststehenden und teuersten Angehörigen erhielt ich ein getreues Bild des edlen Menschen; über Kummer als Lehrer und als Gelehrten konnte ich neben meinen eigenen Erinnerungen diejenigen meiner verehrten Kollegen Frobenius, Gundelfinger und Hettner und den schönen Nekrolog auf Kummer von Herrn Lampe benutzen. So habe ich selbst durch ein Zusammentreffen günstiger

Umstände ein lebensvolles und wahres Bild dieses großen Mannes gewinnen können; möchte es mir gelingen, Ihnen seine Persönlichkeit durch die folgenden Worte nahe zu bringen und die Erinnerung an sein Werk aufs neue in Ihnen aufleben zu lassen.

Ernst Eduard Kummer wurde am 29. Januar 1810 in Sorau nahe der schlesischen Grenze als zweiter und jüngster Sohn des Stadt- und Landphysikus Carl Gotthelf Kummer geboren. Sein Vater wurde durch den Typhus, den die aus Rußland zurückkehrenden Reste der Napoleonischen Armee mit sich brachten, noch in jüngeren Jahren hinweggerafft, und so blieb die junge Frau Friederike Sophie Kummer geb. Rothe mit ihren beiden Söhnen in äußerst bedrängten Verhältnissen zurück. Glücklicherweise hatte ihr der Himmel auch die Fähigkeiten verliehen, das zu ertragen, was er ihr auferlegt hatte. Sie stammte aus einer alten Predigerfamilie und besaß eine für die damalige Zeit gute Bildung; als das große Unglück über sie hereinbrach, nahm sie, um ihre kleinen Kinder durchzubringen, jede Arbeit an; lange Zeit nähte sie Soldatenhemden, für deren jedes sie drei Groschen erhielt und von denen sie drei am Tage fertig stellte. Ihre große, mit ein wenig schlesischem Aberglauben gewürzte Frömmigkeit, ihre innere Heiterkeit und ihr guter Humor führten sie über die Zeiten größter Not glücklich hinweg, und besonders diese Eigenschaften halfen ihr dazu, daß sie ihren beiden Söhnen in der ersten Kinderzeit und auch später stets innerlich nahe stand und besonders auf Ernst Eduard einen großen Einfluß ausüben konnte. Die Pietät, welche Kummer immer gegen ältere Leute gehabt hat, äußert sich am schönsten in den Briefen, die er als junger Student aus Halle an die Mutter schreibt. In einem langen Leben hat die Mutter im Hause ihres geliebten Sohnes in Breslau und in Berlin an seinem Glücke teilnehmen und sich an seinen Kindern als gute und richtige Großmutter erfreuen dürfen.

Trotz ihrer bedrängten Lage setzte Frau Kummer es durch, daß ihre beiden Söhne nach vorhergehender privater Ausbildung das Gymnasium in Sorau besuchen konnten. Ernst, der damals erst neun Jahre alt war und etwa die Kenntnisse eines Quartaners hatte, wurde, da sich die untersten Klassen dieser Anstalt damals keines besonders guten Rufes erfreuten, auf den Wunsch seiner Mutter sogleich in die Sekunda aufgenommen, ein Erfolg, der heute wohl selbst einer sehr energischen Mutter nicht mehr beschieden sein dürfte. Nach drei Jahren in Sekunda hatte er sich bis zum Ersten dieser Klasse emporgearbeitet, da er aber noch zu jung und zu klein war, wurde er auch

jetzt nicht nach Prima versetzt, sondern mußte noch zwei, also im ganzen fünf Jahre Sekundaner und nachher noch vier Jahre in Prima bleiben. In seinem Abgangszeugnis wird schon seine große natürliche Begabung und sein launiger Witz gerühmt, auch wird bereits hervorgehoben, daß er sich in den mathematischen Wissenschaften zu seinem Vorteil ausgezeichnet habe, daß er sich im Deutschen ohne Schwulst zum Poetischen zu erheben und daß er im Lateinischen ziemlich geläufig, wenn auch nicht ciceronianisch zu disputieren vermöge. Dieser letzte Vorwurf darf dem achtzehnjährigen Jüngling billig verziehen werden, denn Cicero selbst wird in diesem Alter wohl auch noch nicht ganz ciceronianisch disputiert haben.

Im Jahre 1828 ging er nach Halle, um dort ebenso wie sein Bruder Karl, auch mit auf den Wunsch seiner Mutter, Theologie zu studieren. Sehr bald regten sich aber in ihm Bedenken dagegen, ob die schroffe rationalistische Art, wie diese Wissenschaft damals in Halle studiert werden mußte, für ihn das Richtige sei. Die Theologie und Philosophie führen zwar nach seiner Ansicht unmittelbar zum höchsten Ziele des Menschen, der Erkenntnis des Wahren, Guten und Schönen, aber die erstere, wie sie zur Zeit betrieben werde, lege dem Geiste des Menschen Fesseln an, welche er nicht ertragen könne, und welche seiner unwürdig seien. „Die Philosophie", so fährt er in einem Briefe an die Mutter fort, „führt den Menschen ebenso sicher zu seinem Ziele, und in ihr werden seinem Geiste keine Fesseln angelegt. Um aber Philosophie treiben zu können, ist das Studium der Mathematik als der Gesetze des menschlichen Geistes und der ganzen Natur die trefflichste Vorbereitungswissenschaft. Diesen beiden Wissenschaften will ich auch daher meine Kräfte weihen, und das Studium der Mathematik wird mir auch mein Brot verschaffen, und mehr verlange ich nicht, denn es kommt mir nicht darauf an, in der Welt zu glänzen oder bequem und ruhig zu leben, sondern einmal nicht umsonst gelebt zu haben ist mein Zweck und meinen Geist veredelt und gebildet zu haben."

Die Philosophie ist für Kummer immer eine Lieblingswissenschaft geblieben, trotzdem er sich in seiner Bescheidenheit hier als einen Dilettanten bezeichnete; allerdings hat ihn auch die von ihm damals als Vorbereitungswissenschaft bezeichnete Mathematik etwas länger in Anspruch genommen und mehr ausgefüllt, als er es mit seinen neunzehn Jahren voraussah. Man kann aber, wie es Kummer ein Vierteljahrhundert später öffentlich aussprach, den Grund dafür, daß mathematisches und philosophisches Talent sich oft vereint finden, darin

sehen, daß es nur die eine Befähigung für das rein abstrakte Denken ist, welcher diese beiden Betätigungen gleichmäßig offen stehen; ob ein mit diesem Talent begabter wissenschaftlicher Forscher sich mehr der einen oder der anderen dieser verwandten Wissenschaften zuwendet, scheint mehr nur von äußeren Bedingungen abhängig zu sein.

Von diesen mehr äußeren Bedingungen war im Falle des jungen Kummer wohl die wichtigste die, daß er in dem anregenden Mathematiker Scherk einen Lehrer fand, der die schwierige Kunst verstanden hat, seinen Schüler gleich in eigene mathematische Untersuchungen hineinzuführen; ist doch der Übergang vom aufnehmenden zum schaffenden Denker gerade in unserer Wissenschaft der schwerste. Ist dieser Schritt von einem bedeutenden Menschen aber einmal getan, so ist kaum mehr zu befürchten, daß er den Wunsch hegen oder die Möglichkeit erhalten wird, sich einer andern Wissenschaft zuzuwenden.

Scherk selber war sich dieses seines großen Verdienstes um die Wissenschaft wohl bewußt und sprach es später mit Stolz aus, er habe nicht vergebens gelebt, da er einen Kummer zum Schüler gehabt habe. Wohl im Hinblick auf ihn stellte er 1831 im dritten Jahre von Kummers Studium eine Preisarbeit „de cosinuum et sinuum potestatibus secundum cosinus et sinus arcuum multiplicium evolvendis“, welche von Kummer in ausgezeichneter Weise gelöst wurde und die Grundlage aller weiteren Arbeiten seiner ersten funktionentheoretischen Periode bildete. Nach der Urteilsverkündigung und der Zuerkennung des Preises von 50 Reichstalern an den Studiosus Ernst Eduard Kummer umarmte und küßte Scherk in der Freude seines Herzens seinen Schüler in der Aula der Universität. Nach diesem ersten wissenschaftlichen Erfolge war ihm natürlich der Weg zum Staats- und Doktorexamen sehr geebnet, und beide Prüfungen verliefen nach seiner eigenen humoristischen Schilderung an seine Mutter höchst angenehm und fast behaglich; ich muß aber gestehen, daß die von Kummer berichteten Anforderungen im Staatsexamen entschieden höher waren als die jetzigen.

So wurde er schon am 10. September 1831, also mit einundzwanzig Jahren, Doktor, trat dann sofort beim Gymnasium seiner Vaterstadt zur Ableistung des Probejahres ein, siedelte aber schon im folgenden Jahre als sechster ordentlicher Lehrer an das Gymnasium in Liegnitz über, wo er bis zum Jahre 1842 sehr zu seiner eigenen Befriedigung verblieb. Eine schwere Zeit müssen diese elf Jahre aber für den jungen Lehrer gewesen sein, denn neben seinen 22—24 Unterrichtsstunden, die in den späteren Jahren den gesamten Rechen- und

Mathematikunterricht des Gymnasiums und den Physikunterricht auf den höheren Klassen umfaßten, schrieb er in rascher Folge jene Arbeiten auf dem Gebiete der Funktionentheorie, auf Grund deren er schon mit neunundzwanzig Jahren zum korrespondierenden Mitgliede der Berliner Akademie ernannt und 1842 nach dem plötzlichen Tode des Professors SCHOLZ als Professor an die Breslauer Universität berufen wurde. KUMMER selbst sagt mit Recht in einem späteren Briefe: „Ich habe zu der Zeit, wo ich in Liegnitz mit 24 Lehrstunden belastet war, unter denen damals noch fast gar keine mathematischen waren, in den ersten Jahren meines dortigen Aufenthaltes wenigstens ebensoviel geleistet als später unter den äußerlich günstigsten Verhältnissen." Immer gedenkt KUMMER mit besonderer Dankbarkeit dieser Liegnitzer Zeit, die ihm auch das ersehnte häusliche Glück in der Ehe mit seiner ersten Frau brachte. Hier wurde ihm auch sein erster Sohn geboren. Nur acht Jahre blieb ihm dieses Glück beschieden; am 30. Juli 1848 wurde ihm seine geliebte Frau nach einer zuerst leichten Krankheit, die schnell in ein schweres Nervenfieber überging, durch den Tod entrissen.

Aber es war für ihn natürlich in wissenschaftlicher Beziehung eine Lebensfrage, daß er die anstrengende und für seine eigenen Arbeiten nicht nutzbare Lehrertätigkeit mit der akademischen Lehrtätigkeit vertauschen durfte, und er schreibt mit innerer Befriedigung an KRONECKER, wie sehr ihm dieser Tausch behagt. „Ich habe hier weder Vorgesetzte, noch Untergebene, ich kann tun und lassen was ich will, denn ich habe niemand etwas zu befehlen."

Es ist so, als ob schon die Aussicht auf die größere geistige Freiheit KUMMER die Anregung dazu gab, sich zum ersten Male auf das Gebiet zu wagen, welches ihm die größte Förderung verdanken sollte, ja dessen Entwicklung ohne ihn gar nicht gedacht werden kann, ich meine das Gebiet der höheren Zahlentheorie. Er schreibt am 16. Januar 1842 an KRONECKER:

„Seit ich bei meiner letzten Anwesenheit in Berlin merkte, es könne mit Breslau Ernst werden, so setzte ich mich zu Hause hin und arbeitete sehr fleißig, um so etwas wie eine Dissertation zur Habilitierung zu arbeiten, und ich fing bei etwas mir ganz Neuem, nämlich bei den cubischen Resten der Primzahlen $6n+1$ an."

So neu ist ihm dieses Gebiet, daß er KRONECKER bittet, ihm eventuell doch die Literatur, besonders die JACOBI betreffende, darüber zusammenzusuchen; so sind auch einige Resultate, die sich KUMMER selbst erarbeitet hat, gar nicht neu, aber schon hier regt sich seine

Phantasie und treibt ihn von der Betrachtung dieser speziellen Zahlkörper zu allgemeineren Bereichen. Immer aber geht der Ausdruck des Bedauerns hindurch, daß er sich erst das Handwerkszeug selbst schmieden muß, während andere es schon fertig erhalten können. So schreibt er an KRONECKER:

„Wenn DIRICHLET Ihnen im nächsten Sommer komplexe Zahlentheorie liest, so nehmen Sie dies dankbar an; ich selbst würde gern mit zuhören, wenn ich könnte, denn Sie können glauben, es ist etwas mühsam, sich dergleichen alles allein aufzusuchen, wenn man wie ich nur etwa die Hauptideeen von anderen erfahren hat.“

Erst später will ich genauer auf die schönste und größte geistige Tat KUMMERS, seine Schöpfung der idealen Zahlen, eingehen, welche in dieser Breslauer Zeit vollständig ausgeführt wurde. Hier setzt eben die Reihe seiner Briefe an KRONECKER ein, welche aber außerdem noch viel des Interessanten gibt. Zuerst handelt es sich um die Antrittsvorlesung und die Disputation über drei Thesen, welcher sich der ordentliche Professor damals noch unterziehen mußte, und hier ist die weitere große Schwierigkeit die, daß außer KUMMER selbst niemand in Breslau ist, der Mathematik, geschweige denn Zahlentheorie versteht.

„So stelle ich“, schreibt er an KRONECKER, „allgemeine Thesen auf, über welche sich reden läßt:

1) In der Mathematik ist vieles, was ebensowohl bejaht, als auch verneint werden muß; eine höchst philosophische These“, fügt er hinzu, „welche indirekt behauptet, daß die Mathematik über den endlichen Verstand zur Vernunft vordringt.

2) Theorie und Praxis in der Mechanik widersprechen sich nie (und zwar weil die eine von ganz anderen Dingen handelt, als die andere).“

Die Freude an philosophischer Betrachtung der Mathematik, die sich hier wieder zeigt, tritt noch stärker in dem schon damals von KUMMER ernsthaft erwogenen Plan einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften hervor, welche den Zweck haben würde, „die ganze Summe mathematischer Erkenntniß der Gegenwart als ein Ganzes erscheinen zu lassen und womöglich überall den Gedanken bloßzulegen, welcher oft ziemlich versteckt liegt. Es müßte eine Enzyklopädie im HEGELschen Sinne werden, zwar nicht philosophisch, aber eine Grundlage der Philosophie der Mathematik. Sie müßte auch im Grunde echt philosophisch sein, aber niemals die philosophische Seite nach außen kehren“. Es scheint mir höchst interessant, daß der

in unserer Zeit mit so glänzendem Erfolge ausgeführte Plan einer allgemeinen Encyklopädie schon damals Kummer so stark beschäftigt hat, und daß er sich allein die Kraft zutraute, dieses große Werk auszuführen. Aber es will mir scheinen, als ob Kummer selbst eingesehen hat, daß dieser Plan jedenfalls für Deutschland und ganz besonders für ihn selbst ein verfrühter wäre. In der zwei Jahre später in der Jenaischen allgemeinen Litteraturzeitung vom 24. August 1847 veröffentlichten Anzeige des ersten Bandes von Jacobis mathematischen Werken sieht er es direkt als einen Vorzug der deutschen Mathematik an, daß hier vorläufig noch nicht, wie in Frankreich, eine so große Anzahl zusammenfassender Lehrbücher, sondern im wesentlichen nur Abhandlungen produziert werden. Er meint, daß wir noch in der ersten frischeren Periode der mathematischen Entwicklung stehen, und fährt dann fort:

„An das erste Stadium, in welchem der Geist, gleichsam eroberungssüchtig, vorzüglich nur auf Erweiterung der Grenzen der Wissenschaft gerichtet ist, schließt sich das zweite an, in welchem die schaffende Tätigkeit zwar keineswegs ausgeschlossen ist, aber die formgebende die Herrschaft über dieselbe erlangt . . . Auch wir werden in der Folge unsere Tätigkeit mehr auf die Form wenden und werden, in das zweite Stadium der Entwicklung dieser Periode unserer Wissenschaft eintretend, umfangreichere Meisterwerke produzieren, wie sie dem umfassenden und zu strenger Systematik geneigten Geiste der deutschen Nation entsprechen. Von da an aber, in dem dritten Stadium, dem des Verfalls, werden wir anfangs noch gelehrte Sammelwerke schaffen und in dem weiteren Verlaufe desselben uns vielleicht damit begnügen, nur das in besseren Zeiten Erarbeitete verständlicher oder gar flacher zurechtzulegen. . . . So vegetiert dann die Wissenschaft fort, bis mit einem neu erwachenden Geist wieder eine neue Periode beginnt."

Darum, fügt Kummer hinzu, wollen wir dahin arbeiten, daß uns erst noch der gegenwärtige in uns lebendige Geist die reichsten Schätze entfalten möge. Dieser Auffassung ist Kummer auch durch sein ganzes Leben treu geblieben. Auch später hat er der Versuchung, ein zusammenfassendes Werk über die Gleichungstheorie zu veröffentlichen, mannhaft widerstanden, und er hat, wie ein Konversationslexikon gewissermaßen bedauernd schrieb, „nur" Abhandlungen veröffentlicht. Allerdings schließt Kummer bei seiner Warnung ausdrücklich solche Werke und Lehrbücher aus, welche, wie die Fundamenta nova von Jacobi, im wesentlichen größere Abhandlungen sind, da sie nur die eigenen Arbeiten des Verfassers enthalten. In dieser Begrenzung

ist aber die eindringliche Mahnung KUMMERS gerade in der heutigen Zeit höchst beachtenswert.

Die soeben erwähnte Anzeige der JACOBIschen Abhandlungen führt mich zu dem Verhältnis KUMMERS zu seinen wissenschaftlichen Zeitgenossen, in welche diese und seine zahlreichen Briefe uns einen fesselnden Einblick gewähren. Unter den damals lebenden Heroen unserer Wissenschaft stand ihm GAUSS unbedingt am höchsten; sein Beispiel war es, welches er seinen Schülern immer und immer wieder vor Augen stellte, und es ist kein Zufall, daß im Anfange der drei großen Perioden seines wissenschaftlichen Schaffens jedesmal eine Arbeit von GAUSS steht, an welche KUMMER anknüpft. Im Mittelpunkte der ersten elfjährigen der Funktionentheorie gewidmeten Periode seiner wissenschaftlichen Arbeit steht seine Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, von der KRONECKER in der Gratulationsadresse der Akademie mit Recht sagen konnte, sie ist „eine würdige Ergänzung jener fundamentalen nur in ihrem ersten Teile erschienenen GAUSS'schen Arbeit, gegründet auf tiefstes in einem Liegnitzer Programm zuerst dargelegtes Erkennen der für die Vergleichung von Transzendenten maßgebenden Prinzipien und durchgeführt mit solcher Vollständigkeit, daß bei viel später mit ganz neuen Mitteln von RIEMANN aufgenommenen Untersuchungen sich nur eine ganz kleine Nachlese von Resultaten ergeben hat."

Die Untersuchungen seiner zweiten fast zwanzigjährigen arithmetischen Periode knüpfen an die GAUSS'schen Abhandlungen über die biquadratischen Reste an, in welchen zuerst die Zahlen von der Form $a+bi$ mit rationalen Koeffizienten arithmetisch untersucht werden, wo also der erste algebraische Körper, und zwar in der erklärten Absicht betrachtet wird, die Methoden, welche in der Theorie der rationalen Zahlen zum quadratischen Reziprozitätsgesetze geführt hatten, nun zum Beweise des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes zu benutzen.

Endlich nehmen die Arbeiten der dritten wesentlich geometrischen Periode von KUMMERS Schaffenszeit ihren Ausgang von Grundgedanken, welche sich in GAUSS' berühmter Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas" finden. Im Anschluß an Untersuchungen von HAMILTON begründet KUMMER hier eine Theorie der allgemeinen Strahlensysteme, von der die Lehre von den Flächen und ihren Normalensystemen ein spezieller Fall ist, so daß er von diesem höheren Standpunkte aus die GAUSSischen Theorieen wesentlich erweitert und ihnen einen neuen Reiz verliehen hat. An sie schließen sich dann

Kummers Arbeiten zur Behandlung der speziellen algebraischen Strahlensysteme an, die seinen Namen gerade in den weitesten Kreisen so sehr bekannt gemacht haben.

Nach Gauss sind es Jacobi und Dirichlet, welche nach Kummers Ausspruch allein der deutschen Mathematik um diese Zeit das Übergewicht über die französische verleihen, „wo uns drei Sterne erster Größe glänzen, jenen nur einer, nämlich Cauchy".

Schon sein bereits erwähntes Liegnitzer Osterprogramm über die hypergeometrische Reihe schickte Kummer als Einjährig-Freiwilliger in einem Soldatenbriefe an Jacobi nach Königsberg: „Dies kann mir nun freilich sonst nichts nutzen", schreibt er mit der ihm eigenen Heiterkeit an seine Mutter, „aber es ist dafür um so besser, denn man muß ja nicht alles des Nutzens wegen tun. Ich überschicke es ihm bloß darum, weil er gerade die größten Entdeckungen in dem Fache gemacht hat, worüber mein Programm handelt, und er wird sich darüber wundern und freuen zugleich, daß ein Musketier dieselben Gegenstände behandelt als er." Dieser Brief, der die für ihn so wichtigen Beziehungen mit Jacobi und Dirichlet anknüpfte, hatte auch die von Kummer gewünschte Wirkung, denn Jacobi soll den Soldatenbrief in Königsberg mit den Worten gezeigt haben: „Wenn schon Musketiere jetzt so ausgezeichnete mathematische Arbeiten machen, dann möchte ich einmal die der Herren Unteroffiziere sehen."

Besonders haben ihn Jacobis Untersuchungen über die Kreisteilungsgleichungen im Anfang seiner zweiten Schaffensperiode stark beeinflußt; eine ganze Reihe von Resultaten hatte er selbst gefunden, um nachher zu erfahren, daß sie schon Jacobi erkannt und in seinen Vorlesungen vorgetragen hatte.

Sehr eng wurde Kummers Verhältnis zu Dirichlet, der schon früh die Bedeutung Kummers klar erkannt hatte; auf ihn besonders ist wohl die so frühe Ernennung zum Korrespondenten der Akademie zurückzuführen, er war es wohl auch, der Kummer zuerst in Breslau empfahl und ihn später in Berlin als seinen Nachfolger vorschlug. Die größte Verehrung und Bewunderung für diesen Mann und diesen Gelehrten erfüllte Kummer stets; fast jeder Brief an Kronecker enthält seinen Namen; das schönste Denkmal hat er Dirichlet in der Gedächtnisrede gesetzt, welche er am 5. Juli 1860 seinem großen Lehrer an der Berliner Akademie gehalten hat. Denn Kummers Lehrer ist Dirichlet, obwohl er nur fünf Jahre älter war und obwohl Kummer nie eine Vorlesung bei ihm gehört hat, im höchsten Sinne gewesen, dafür legen die Werke Kummers das schönste Zeugnis

ab. Ist doch in seiner Theorie der Kreiskörper die Frage der Unabhängigkeit der Kreisteilungseinheiten und die der Klassenzahlbestimmung vollkommen auf der Grundlage gegeben, welche DIRICHLET in seinen berühmten Beweisen über die arithmetische Reihe und in der Klassenzahlbestimmung für quadratische Formen von gegebener Determinante verwendet.

Von gleichaltrigen und jüngeren Mathematikern stand ihm durch sein ganzes Leben hindurch KRONECKER am nächsten; in seiner Breslauer Zeit schloß er sich besonders an JOACHIMSTHAL an; weniger persönlich nahe trat er EISENSTEIN, aber aus seinen Briefen ergibt sich deutlich, wie hoch er ihn als Gelehrten einschätzte. Es war KUMMER, welcher auf eine Anregung von JACOBI die Ernennung EISENSTEINS zum Ehrendoktor an der Breslauer Universität beantragte und unter den größten Schwierigkeiten, die ihm durch Rückständigkeiten seiner Kollegen gemacht wurden, auch wirklich durchsetzte. Besonders bewunderte KUMMER, wie er in der Einleitung der großen Akademieabhandlung vom Jahre 1859 über die allgemeinen Reziprozitätsgesetze selbst hervorhebt, den bekannten EISENSTEINschen Beweis dieses Gesetzes durch Vermittlung der Kreisfunktionen, der so leicht auf die kubischen und biquadratischen Reziprozitätsgesetze ausgedehnt werden kann, wenn er auch die Versuche EISENSTEINS, auf demselben Wege zu den allgemeinen Gesetzen zu kommen, als mißlungen bezeichnen mußte.

Endlich möchte ich noch mit ein paar Worten auf KUMMERS Verhältnis zu WEIERSTRASS hinweisen. Als KUMMER 1855 als Nachfolger DIRICHLETS nach Berlin berufen wurde, hatte die Breslauer Universität für ihn einen Nachfolger zu bestimmen. Hier hatte KUMMER den Antrag gestellt, drei bewährte akademische Gelehrte vorzuschlagen und WEIERSTRASS und ROSENHAIN zwar rühmend zu nennen, aber nicht vorzuschlagen. In bezug auf WEIERSTRASS begründete KUMMER in einem Briefe an KRONECKER diesen Antrag damit, daß WEIERSTRASS bisher eine einzige Abhandlung „Zur Theorie der ABELschen Funktionen“ habe erscheinen lassen. Diese wissenschaftliche Leistung sei allerdings derart, daß er auf Grund derselben sogleich mit Ehren Mitglied der Berliner oder einer anderen Akademie werden könne; aber zur Ausfüllung der Professur für Mathematik an einer Universität wie die Breslauer, in welcher er nicht nach seinem Belieben lesen könne, sondern, da er im wesentlichen allein sei, für alles stehen müsse, was zur Ausbildung junger Mathematiker gehört, böte sie noch nicht die nötigen Garantieen.

Aber schon zu dieser Zeit stand es bei Kummer fest, daß Weierstrass nach Berlin kommen müsse, und so sehen wir ihn denn nur wenige Wochen später nach den Mitteilungen eines Briefes an Kronecker vom 25. August 1855 in Berlin im Ministerium eifrig dafür wirken, daß Weierstrass mit dem bei Dirichlet ersparten Gehalte gleich in Berlin eine seiner Bedeutung angemessene Stellung erhielte. Es waren also nur die Garantieen dafür, daß Weierstrass geeignete Übung dafür besäße, alle Studierende einer kleinen Universität auch durch die elementaren Vorlesungen im vollen Umfange in die Mathematik einzuführen, welche Kummer vermißte, aber er selbst wollte diesen großen Mann neben sich an der ersten preußischen Universität haben, wie es denn auch später wirklich geschah. Weierstrass hat ja dann in Berlin Kummer sehr nahe gestanden, wie Kronecker in einem Briefe bezeugt: „Die etwa 20 Jahre, von 1856 bis nahe 1876, in denen wir drei, Kummer, Weierstrass und ich, des engsten und lebhaftesten wissenschaftlichen Verkehrs uns erfreuten, haben uns reiche Früchte und den Segen wahrer geistiger Erbauung gebracht."

Nach dem schweren Verluste, der Kummer in Breslau betroffen hatte, führte ein günstiges Geschick den Bund fürs Leben mit seiner zweiten Gattin Bertha aus der Künstler- und Gelehrtenfamilie Cauer herbei, mit welcher ihn und seine erste Frau schon längere Zeit eine nahe und innige Freundschaft verbunden hatte. Es war ihr beschieden, in 45jähriger glücklichster Ehe mit Kummer vereint alle die reichen Jahre in Breslau und Berlin zu verleben, und mit ihm seine zahlreichen Kinder (neun Kinder überlebten ihn) zu wertvollen Menschen zu erziehen. Auch heute dürfen wir mit Dank und Freude diese verehrte Frau in unserem Kreise begrüßen.

Wir müssen jetzt Breslau verlassen und Kummer nach Berlin begleiten, wo er nach vielem Suchen in der Köthener Straße 14 eine Wohnung fand, welche er dann nach einigem Wechsel später mit der ihm so lieb gewordenen Wohnung Schöneberger Straße 10 vertauschte, in der er bis zu seinem Tode geblieben ist; die Aussicht von seinem Balkon in den Garten dieser letzten Wohnung stellte er, allerdings scherzhaft, beinahe höher als den Blick vom Hause seines Schwiegersohnes über den im vollen Sonnenglanze vor ihm liegenden Züricher See.

Kummer wurde im vollen Umfange Dirichlets Nachfolger in Berlin. Auch ihm wurde die Professur an der damaligen allgemeinen Kriegsschule, der jetzigen Kriegsakademie übertragen. Während

DIRICHLET aber allmählich gerade unter dieser Verpflichtung etwas litt, hat sie KUMMER in den neunzehn Jahren bis 1874, wo er sich bei zunehmendem Alter von ihr zurückzog, gern erfüllt, und in so ausgezeichneter Weise, daß die Oberleitung dieses Institutes ihm, wie Herr LAMPE in seinem Nekrologe erzählt, eine Pension aussetzen wollte, obschon diese Stelle nicht pensionsberechtigt war. Es ist charakteristisch für KUMMERS Denkart, daß er bat, von einem solchen Schritte Abstand zu nehmen; er habe diese Stelle stets als eine solche angesehen, die infolge von unberechenbaren Zufällen plötzlich aufgegeben werden könnte, und habe deshalb das Honorar nie in seinen Etat mit aufgenommen. Die Zinsen der so entstandenen Ersparnisse seien nun gerade so hoch gewachsen, wie die bisherigen Einnahmen an der Kriegsakademie. Diese mit innerem Behagen abgegebene Erklärung wurde noch längere Zeit bewundernd an der Kriegsakademie besprochen.

Noch wichtiger war es, daß KUMMER DIRICHLETS Nachfolger in der Berliner Akademie der Wissenschaften wurde; am 3. Juli 1856 hielt er am Leibniztage mit BORCHARDT zusammen seine Antrittsrede. Nur wenige Sätze sind es, in denen er hier sein Glaubensbekenntnis entwickelt, aber sie sind höchst charakteristisch für den Mann, der sie ausspricht:

„Die mathematischen Wissenschaften haben in unserem Vaterlande seit mehreren Dezennien einen neuen Aufschwung genommen. Der deutsche Geist, getrieben von dem ihm eigenen Drange nach Erkenntnis, hat mit verjüngter Kraft den ewigen Formen und Gesetzen des Mathematischen sich zugewendet und in demselben ein reiches Feld seiner Tätigkeit gefunden. Es ist darum jetzt in der Mathematik die wissenschaftliche Forschung die vorherrschende Richtung, die Forschung, welche weniger im Wissen als Erkennen ihre Befriedigung findet und darum in die Tiefe der Wissenschaft zu dringen sucht, wo sie die Lösung vorhandener Rätsel findet, und wo neue Rätsel ihr entgegen treten. Zu dieser Richtung habe auch ich aus innerer Neigung mich hingezogen gefühlt; wenn ich aber meinen wissenschaftlichen Standpunkt noch weiter angeben soll, so kann ich ihn füglich als einen theoretischen bezeichnen, und zwar nicht allein darum, weil die Erkenntnis allein das Endziel meiner Studien ist, sondern namentlich auch darum, weil ich vorzüglich nur diejenige Erkenntnis in der Mathematik erstrebt habe, welche sie innerhalb der ihr eigentümlichen Sphäre ohne Rücksicht auf ihre Anwendungen gewährt. Ihre höchste Blüte kann sie nach meinem Dafürhalten nur in dem ihr eigenen Elemente des abstrakten reinen Quantums entfalten, wo sie

unabhängig von der äußeren Wirklichkeit nur sich selbst zum Zwecke hat."

Sowohl die Bedeutung von Kummers wissenschaftlichen Arbeiten, welche er nun in großer Zahl in den Sitzungsberichten und Abhandlungen der Akademie veröffentlichte, als auch die streng sachliche Art seines Denkens, die Rechtlichkeit und Selbständigkeit seines Handelns machten ihn sehr bald zu einem der ausschlaggebenden Mitglieder dieser Körperschaft. Dies trat auch äußerlich darin hervor, daß er schon im Jahre 1863 zum ständigen Sekretar der physikalisch-mathematischen Klasse ernannt wurde. Ihm war es keine Last, neben seinen wissenschaftlichen Arbeiten auch die Geschäfte der Akademie zu führen, ja er betrachtete diese Tätigkeit als eine Art von Erholung, deren er bedürfe, um neue Kräfte zu sammeln. Durch die Festigkeit seines Charakters, durch die Unbestechlichkeit seines Urteiles, über dessen lautere Motive nie ein Zweifel bestehen konnte, eignete er sich ganz besonders für dieses schwierige Amt. Auch den Reden, welche er in den öffentlichen Sitzungen zur Gedächtnisfeier Friedrich des Großen, zum Leibniztage und zum Geburtstage des Königs zu halten hatte, widmete er sich mit besonderem Interesse. Sie gaben ihm Gelegenheit, sich über die zahlreichen nicht rein mathematischen, besonders philosophischen und historischen Fragen auszusprechen, welche ihn auch in seinem späteren Leben im reichsten Maße fesselten. Seine kurzen klaren Gedenkreden auf Friedrich den Großen und sein Verhältnis zu den mathematischen Wissenschaften, ferner über dessen Stellung zur Leibniz-Wolffschen Philosophie und den Enzyklopädisten zeigen, wie eingehend er sich auch jetzt noch mit der ihm so teuren Philosophie beschäftigte, seine Rede über Friedrich den Großen und die militärischen Bildungsanstalten läßt erkennen, wie tief er sich in die Geschichte und die Anschauungen dieses von ihm am höchsten gestellten Fürsten hineingelebt hatte.

Die wichtigste äußere Aufgabe, welche an Kummer als Nachfolger Dirichlets herantrat, war die Vertretung der Mathematik an der größten Universität Preußens, nachdem er vorher in dem kleineren Breslau als im wesentlichen einziger Vertreter seines Faches Gelegenheit gehabt hatte, sich als vielseitiger Lehrer der Jugend zu bewähren. Seiner ganzen Geistesrichtung, seiner Freude am Unterricht und an dem Verkehr mit der Jugend nach mußte Kummer ein vortrefflicher akademischer Lehrer sein. Aber es ist recht interessant zu sehen, wie er diese Pflicht auffaßte, welche Ziele er beim akademischen Unterricht hauptsächlich verfolgte. Während Weierstrass, Kronecker, Helm-

HOLTZ Wert darauf legten, die jugendlichen Studenten auf schwierigem Wege zu den höchsten erreichbaren Höhen der Erkenntnis zu führen, zu Fragen, mit deren Lösung sie selber zum Teil erst beschäftigt waren, hielt es KUMMER mehr für seine Pflicht als akademischer Lehrer, seine Schüler mit sicherer Hand in den schon begründeten Besitz der mathematischen Wahrheiten einzuführen; hierin aber war er Meister, und die vielen vielen Hunderte von Mathematikern, denen er für ihr Leben das Beste und Sicherste gegeben hat, die feste Grundlage, auf der sich ihr geistiger Besitz aufbaute, danken ihm die weise Beschränkung, welche sich dieser große phantasievolle Denker auferlegte, um ganze Generationen von wertvollen Gelehrten und Lehrern heranzuziehen. So ist es zwar gekommen, daß vielleicht z. B. WEIERSTRASS durch seine Lehrtätigkeit mehr individuelle Schüler herangebildet hat, denn er sagte in seinen Vorträgen manches, was außer ihm kein anderer zu sagen vermochte, aber KUMMER glaubte, daß diese Einwirkung durch seine Arbeiten geschehen würde, die er stets so ausführlich und pädagogisch schrieb, daß sie jeder genügend vorgebildete Leser verhältnismäßig leicht und mit Genuß lesen konnte. Und als Schüler seiner Schriften muß sich doch wohl heutzutage jeder Mathematiker, insbesondere jeder Arithmetiker, ansehen; der beste Beweis dafür liegt vielleicht in der statistischen Tatsache, daß der HILBERTsche Zahlbericht, die beste zusammenfassende Darstellung der höheren Arithmetik, die wir heute haben und wohl auch auf lange Zeit haben werden, in dem sehr knappen Verzeichnis der benutzten Abhandlungen 26 Arbeiten von KUMMER aufführen muß, mehr als bei irgend einem anderen Gelehrten.

KUMMER las in der späteren Berliner Zeit einen regelmäßigen zweijährigen Kursus von vier vierstündigen Vorlesungen: Analytische Geometrie, Mechanik, Flächentheorie, Zahlentheorie. Er war immer ein sehr beliebter Lehrer; in der früheren Zeit hatte er gewöhnlich 40—50 Zuhörer, aber in der Zeit des großen Andranges habe ich bei ihm eine Vorlesung über Zahlentheorie gehört, welche im Barackenauditorium vor mindestens 250 Zuhörern gehalten wurde.

Was KUMMER in seinen Vorlesungen in hohem Grade auszeichnete, war seine Klarheit, seine Ruhe beim Vortrage, die durchsichtige Disposition und auch die angeregte Art seines Sprechens; man hatte immer den Eindruck, als freue er sich, seinen Zuhörern diese Dinge vortragen zu können, und dies war auch wirklich der Fall; hat er es doch selbst ausgesprochen, daß nach der Erkenntnis einer neuen Wahrheit sein größter Genuß darin bestanden hätte, eine solche empfänglichen Men-

schen darzulegen. Der Minister von Gossler erzählte, Kummer habe ihm im hohen Alter gesagt, daß er sich noch immer sorgfältig auf jede einzelne seiner Vorlesungsstunden vorbereite.

Er hatte in hohem Maße das Talent, Figuren in der Luft mit der Hand vor seinen Zuhörern gleichsam entstehen zu lassen. Modelle benutzte er nie, sprach sich sogar über deren Gebrauch mißbilligend aus. Er liebte es, kleine witzige Geschichten zu erzählen, jedoch kamen diese keineswegs oft vor. Eine solche Geschichte kündigte sich schon vorher durch ein Lächeln bei ihm an, und schon dadurch wurden seine Zuhörer unwillkürlich heiter gestimmt. In solchen witzigen Bemerkungen geißelte er gern die voreiligen Schlüsse der Physiker, welche mitunter auf verhältnismäßig nur wenige Experimente gestützt überraschende Naturgesetze aufstellen und sie damit für streng bewiesen halten, oder er spottete über die Mathematiker, die gelegentlich durch Einführung neuer Bezeichnungen den Mangel neuer Gedanken zu verbergen suchen. Ein großer Reiz bei seinen Vorlesungen lag auch in der Persönlichkeit des Vortragenden: immer hatte man das Gefühl, nicht nur einem großen Gelehrten, sondern auch einem **Charakter** gegenüberzustehen.

Während Kummer in seinen großen Vorlesungen prinzipiell vom Eingehen auf eigene Untersuchungen absah, hielt er es in dem mathematischen Seminar, welches er wohl als einer der ersten in Deutschland eingerichtet hat, im Gegenteil für geboten, vor den Mitgliedern, welche er zu eigenen Untersuchungen anregen wollte, Fragen zu behandeln, in welchen er bereits schöpferisch tätig gewesen war, und ihnen den Weg zu weiterem Vordringen zu weisen. Meistens begannen jene Seminarübungen damit, daß Kummer eine Anzahl Aufgaben vorlegte, welche er eingehend besprach, und die fast immer mit seinen eigenen, besonders seinen geometrischen Arbeiten in engem Zusammenhange standen; er hatte aber auch den Humor, uns unter diesen auch die vollständige Lösung des großen Fermatschen Problemes für dieses Semester zu empfehlen; ihm selbst sei dieses zwar nicht gelungen, aber warum sollten wir nicht glücklicher sein? Dann wandte er sich dem eigentlichen Thema seiner Besprechungen zu.

Hier gab er z. B. eine Darstellung seiner Abhandlung vom 16. Juli 1863 „Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen". Diese führte ihn zu einer Besprechung der sog. Steinerschen Fläche und dadurch wurde ihm Gelegenheit gegeben, höchst merkwürdige Einzelheiten über die Persönlichkeit ihres Entdeckers Steiner und seine Arbeiten anzugeben, dann aber auch eine

Anzahl interessanter verwandter Fragen vorzuführen. Ein anderes Mal knüpfte er die Besprechungen an seine Arbeit im CRELLEschen Journale Bd. 35 „Über Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden“ an.

In den späteren Stunden wurden dann die Lösungen der Aufgaben von den Mitgliedern vorgetragen. Nur wenn sich niemand fand, der, wie er sagte, die Kosten der Unterhaltung trug, hielt er selber einen Vortrag, in dem er meisterhaft anschaulich und schnell in ein Gebiet der höheren Mathematik einführte und darauf hinwies, in welcher Richtung wohl diese Probleme ausgebaut werden könnten.

Sehr interessierten ihn in seiner späteren Berliner Zeit im Jahre 1875 auch seine Untersuchungen über den Luftwiderstand der Geschosse, und er hat damals mitunter auch über die mathematischen Grundlagen dieser Theorie, soweit diese sich aufstellen ließen, gesprochen. Da er aber erkannte, daß dieser Frage, wie er sich selber ausdrückte, auf rein mathematischem Wege noch nicht beizukommen sei, so mußte er hier schon einmal zum Experimente greifen, um die Hauptfrage zu entscheiden, in welcher Weise der Angriffspunkt der Resultante des Luftdruckes von dem Winkel abhängt, den die Achse des Geschosses mit der Richtung der fortschreitenden Bewegung bildet. Einmal lud er auch die Seminarmitglieder zu sich ein, um ihnen den zu diesem Zwecke von ihm konstruierten Rotationsapparat zu zeigen.

Die Stellung eines Themas für eine Doktorarbeit lehnte er prinzipiell ab; das wäre gerade so, meinte er, wie wenn mich ein junger Mann fragte, ob ich ihm nicht ein hübsches junges Mädchen empfehlen wollte, das er heiraten sollte. Auch die Bearbeitung der von Akademieen gestellten Preisarbeiten verwarf er, wenn man sich nicht zufällig vorher so wie so mit dem Gegenstande beschäftigt hatte; die Untersuchungen müßten aus den eigenen Studien herauswachsen.

Aus den vorhin gemachten Bemerkungen über die große Wirkung, welche KUMMERS Arbeiten auf die ganze Entwicklung seiner Wissenschaft ausgeübt haben, erkennen Sie, verehrte Anwesende, daß meine Darstellung des Lebens und des Lebenswerkes von KUMMER unvollständig sein würde, wenn ich nicht seiner Werke gedenken wollte, durch die er ein Lehrer und ein Pfadfinder für seine ganze Wissenschaft bei der Mit- und Nachwelt geworden ist. Die mir zu Gebote stehende Zeit verbietet mir leider, auf seine ganze Lebensarbeit einzugehen; ich muß und will mich beschränken auf den Teil derselben, durch den er am stärksten auf die Wissenschaft gewirkt hat, aus dem man am besten

die Art seiner schöpferischen Phantasie beurteilen kann, ich meine seine Entdeckungen in der höheren Zahlenlehre und seine Schöpfung der idealen Zahlen.

Ich erwähnte schon, daß der Beginn seiner zwanzigjährigen Entdeckerarbeit im Gebiete der Zahlenlehre, welche ihn zuletzt an die Spitze nicht nur der deutschen, sondern aller Arithmetiker seiner Zeit stellte, fast genau mit seiner Berufung an die Breslauer Universität im Jahre 1842 zusammenfällt, und daß gerade hier der Briefwechsel mit Kronecker einsetzt, welcher das Werden und Wachsen seiner Ideen so deutlich erkennen läßt.

Da ist es nun höchst interessant zu sehen, wie schwer es Kummer zuerst gemacht wurde, in das Gebiet hineinzukommen, welches später das Feld seiner größten wissenschaftlichen Triumphe werden sollte.

Ich möchte zum besseren Verständnis des Weiteren auf die wichtige Frage der elementaren Zahlenlehre hinweisen, von der Kummer später ausging. Die Zahlentheorie oder Arithmetik beschäftigt sich bekanntlich mit den gewöhnlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... und sucht, soweit sie systematisch begründet ist, diejenigen ihrer Eigenschaften zu ergründen, welche auf ihrer multiplikativen Zerlegung beruhen. Die Eigenschaften der Zahlen, die auf ihrer Zerlegung durch Addition beruhen, müssen leider fast ganz ausgeschlossen werden, da ihrer direkten wissenschaftlichen Behandlung vorläufig noch unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Die Grundlage dieser ganzen multiplikativen Zahlenlehre beruht nun auf dem Satze, daß jede Zahl stets und nur auf eine Weise in ein Produkt von gleichen oder verschiedenen Primfaktoren zerlegt werden kann, daß sie sich also alle auf eine einzige Art multiplikativ aus den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... zusammensetzen lassen.

Fast alle lange ungelösten großen Probleme der Zahlenlehre sind solche, welche auf additive Eigenschaften der Zahlen gegründet sind, und fast immer gelang ihre Lösung dadurch, daß es möglich war, diese Frage in eine Frage der Multiplikation umzuformen. Besonders war dies der Fall bei der Aufgabe, welche ich jetzt mit Bewußtsein in den Vordergrund stelle, alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seiten, oder was dasselbe ist, alle ganzzahligen Lösungen der einfachsten Fermatschen Gleichung

$$x^2 = y^2 + z^2 \tag{1}$$

zu finden; an sie knüpft nämlich die ganze Schöpfung Kummers an, durch sie wurde sie hervorgerufen. Schreibt man diese Gleichung in

der Form

$$(1a) \qquad z^2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = b_0 b_1,$$

so ist das additive Problem in das multiplikative verwandelt, alle ganzen Zahlen x und y zu finden, für welche das Produkt $b_0 b_1$ eine Quadratzahl ist. In dieser Form kann die Aufgabe leicht vollständig gelöst werden; schon die Pythagoräer konnten unendlich viele, die indischen Mathematiker alle ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung aufstellen. So ist z. B.

$$5^2 = 3^2 + 4^2, \quad 13^2 = 5^2 + 12^2, \quad 25^2 = 7^2 + 24^2, \cdots.$$

Es wird Ihnen nun bekannt sein, daß der große französische Mathematiker, der Parlamentsrat in Toulouse Pierre Fermat, in einer Randbemerkung zu den sechs arithmetischen Büchern des alexandrinischen Mathematikers Diophant die Behauptung ausgesprochen hat, daß die obige einfachste unter den Gleichungen

$$(2) \qquad x^\lambda = y^\lambda + z^\lambda$$

für $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$ die einzige ist, welche überhaupt ganzzahlige Lösungen besitzt, daß es also z. B. keinen ganzzahligen Kubus gibt, der die Summen zweier Kuben, keine vierte Potenz, die die Summe zweier vierten Potenzen wäre usw. Er fügte hinzu, der Rand des Buches sei zu klein, um den von ihm gefundenen wunderbaren Beweis dieser überraschenden Tatsache aufzunehmen.

Zunächst erscheint es als ein Unglück, daß Fermat hier nicht mehr freies Papier zu seiner Verfügung gehabt hat; bei näherer Betrachtung möchte man diesen Umstand eher als einen für die Entwicklung der Wissenschaft glücklichen bezeichnen, denn ohne ihn würden wir zwar vielleicht den vollständigen Beweis dieses an sich gar nicht so wichtigen Fermatschen Satzes, aber wohl sicher nicht die Kummersche Idealtheorie besitzen, welche allein aus den Bemühungen, diesen Satz zu beweisen, erwachsen ist.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, daß es genügt, die Unmöglichkeit der Lösbarkeit der sog. Fermatschen Gleichungen

$$x^\lambda = y^\lambda + z^\lambda$$

in ganzen Zahlen nur für diejenigen unter ihnen zu beweisen, in denen der Exponent λ entweder vier oder eine ungerade Primzahl 3, 5, 7, 11, ... ist. In dieser Form ist das Fermatsche Problem ein Prüfstein für unsere Zahlentheorie geworden, und als solcher hat es den größten Einfluß auf die Entwicklung unserer Wissenschaft gehabt.

Man könnte nun auch z. B. im Falle $\lambda = 4$ die Umwandlung aus dem additiven in ein multiplikatives Problem versuchen, jene Gleichung (2) also in der Form

$$z^4 = x^4 - y^4 \tag{3}$$

schreiben; denn auch hier läßt sich die rechte Seite in vier Faktoren zerlegen und in der Form

$$z^4 = (x - y)(x + y)(x - iy)(x + iy) = b_0 b_1 b_2 b_3 \tag{3a}$$

schreiben, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Man kann die Frage auch in dieser Form behandeln, muß dann aber wohl beachten, daß die Faktoren rechts nicht mehr ganze reelle Zahlen, daß vielmehr wenigstens die beiden letzten b_2, b_3 ganze komplexe Zahlen, nämlich Zahlen von der Form $a + bi$ sind, wo a und b reelle ganze Zahlen bedeuten. Will man auf sie also die Ergebnisse unserer Arithmetik anwenden, so muß man diese komplexen Zahlen ganz ebenso behandeln, wie die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Gauss hat diesen großen Schritt in der bereits vorher erwähnten Abhandlung getan; er hat gezeigt, daß in diesem größeren Gebiete aller Zahlen $a + bi$ genau dieselben Gesetze bestehen, wie in dem kleineren der reellen ganzen Zahlen. Insbesondere wies er nach, daß nun jede reelle und jede komplexe Zahl in diesem Bereiche auf eine einzige Weise als Produkt nicht weiter zerlegbarer Primzahlen darstellbar ist. In diesem Zahlenbereiche sind nämlich alle reellen Primzahlen von der Form $4n - 1$, also die Zahlen

$$3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 23,\ 31,\ \ldots$$

unzerlegbar, dagegen zerfällt jede reelle Primzahl von der Form $4n + 1$, also jede der Zahlen

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ \ldots$$

in ein Produkt von zwei voneinander verschiedenen unzerlegbaren komplexen Zahlen; so ist z. B.:

$$5 = (2 + i)(2 - i),\quad 13 = (3 + 2i)(3 - 2i),\quad 17 = (4 + i)(4 - i),\ \ldots;$$

die gerade Primzahl 2 endlich ist, abgesehen von einer Einheit, gleich dem Quadrate des Primfaktors $1 - i$. Dies sind nun aber auch alle Primzahlen im Bereiche dieser komplexen Zahlen, und hier, wie in der Theorie der reellen Zahlen besteht der Fundamentalsatz:

> Jede komplexe Zahl kann stets und nur auf eine einzige Weise in ein Produkt von komplexen Primzahlen zerlegt werden.

So besteht z. B. folgende eindeutig bestimmte Zerlegung:

$$24 - 3i = 3(2 + i)(3 - 2i).$$

Deshalb allein gelten auch in diesem erweiterten Gebiete alle Sätze unserer gewöhnlichen Zahlenlehre und deshalb kann man auch ohne wesentliche Schwierigkeit die Unmöglichkeit der FERMATschen Gleichung für $\lambda = 4$ allein mit Hilfe der umgeformten Gleichung (3a) beweisen

Es lag nun nahe, auch bei der FERMATschen Gleichung $x^\lambda = y^\lambda + z^\lambda$, wenn λ eine beliebige ungerade Primzahl ist, etwa für $\lambda = 5$, dieselbe Umwandlung aus dem additiven in ein multiplikatives Problem zu versuchen. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$z^\lambda = x^\lambda - y^\lambda,$$

so kann man nämlich die rechte Seite wieder in ein Produkt von λ Faktoren zerlegen, wenn man sich nicht scheut, zu den rationalen Zahlen ebenso wie vorher die Zahl $i = \sqrt{-1}$ jetzt eine andere sog. algebraische Zahl hinzuzunehmen. Ist nämlich α eine sog. primitive Wurzel der Gleichung

$$\alpha^\lambda = 1,$$

so läßt sich die rechte Seite jetzt als das Produkt von λ Faktoren

$$(4) \quad z^\lambda = (x - y)(x - \alpha y)(x - \alpha^2 y) \cdots (x - \alpha^{\lambda-1} y) = b_0 b_1 \cdots b_{\lambda-1}$$

darstellen, und man könnte nun versuchen, dieselben Methoden anzuwenden, wie sie vorher für den Fall $\lambda = 4$ benutzt wurden. Hier ist aber zu beachten, daß wir in diesen Faktoren b_k nicht gewöhnliche ganze Zahlen, sondern Zahlen zu untersuchen haben, welche aus α und ganzen Zahlen rational zusammengesetzt sind; diese lassen sich analog wie vorher die Zahlen $a_0 + a_1 i$ in der allgemeinen Form

$$b = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_{\lambda-1} \alpha^{\lambda-1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen.

Will man also auf dieses allgemeine FERMATsche Problem die Methoden und Ergebnisse der Zahlenlehre anwenden, so muß man zunächst fragen, ob auch für diese Zahlen „in α“, wie ich sie nennen will, die Grundsätze der Arithmetik gelten, zunächst also, ob sich jede solche Zahl stets als Produkt von nicht weiter zerlegbaren Zahlen in α darstellen läßt.

KUMMER wandte sich diesen Fragen mit der ganzen Begeisterung des geborenen Arithmetikers zu, trotzdem er zuerst gar keine Vorkenntnisse in diesem Gebiete hatte. Bald war er zu dem wichtigen Resultate gelangt, daß sich in der Tat die ganzen Zahlen in α stets in unzerlegbare Faktoren zerfällen lassen, und auf Grund dieser Tat-

sache hielt er die Zeit für gekommen, um mit einem Schlage dieses vielumworbene heißumstrittene Fermatsche Problem ganz allgemein zu lösen, während dies vorher unter großen Schwierigkeiten nur für ganz wenige Exponenten $\lambda = 4, 3, 5$ und einige andere und zwar durch Methoden geschehen war, die scheinbar allein gerade auf diese Exponenten zugeschnitten waren.

Es ist wohl nur wenigen bekannt, aber durch ganz einwandfreie Zeugnisse, unter anderen durch das des Herren Gundelfinger belegt, der die Mitteilung dem Mathematiker Grassmann verdankte, daß Kummer in dieser Zeit des Vorwärtsstrebens wirklich einen vollständigen Beweis des großen Fermatschen Satzes gefunden zu haben glaubte und ihn im Manuskript Dirichlet vorgelegt hat, welcher schon als Verfasser des unübertrefflich schönen Beweises für den Satz im Falle $\lambda = 5$ der beste Kritiker für diese Frage sein mußte. Nach einigen Tagen gab ihn Dirichlet mit dem Urteile zurück, der Beweis sei ganz ausgezeichnet, und sicher richtig, wenn es feststände, daß die Zahlen in α nicht bloß stets, was Kummer ja bewiesen hatte, in unzerlegbare Faktoren zerfielen, sondern daß dies auch nur auf eine Weise möglich wäre. Wäre diese zweite Annahme aber nicht richtig, so wären die meisten Sätze der Arithmetik für die Zahlen in α unbewiesen und der ganze Kummersche Beweis sei völlig hinfällig; leider schienen ihm die Zahlen in α jene Fundamentaleigenschaft wirklich nicht allgemein zu haben.

Die Art nun, wie Kummer diesen niederschmetternden Einwand, von dessen Berechtigung er sich leider bald überzeugen mußte, aufnahm, ist höchst charakteristisch für den Geist und für die Energie dieses wahrhaft großen Gelehrten. Er sieht vor allem ein, und spricht dies auch in der Gratulationsschrift für die Königsberger Universität aus, daß es nicht angehe, die arithmetische Untersuchung der Zahlen in α aufzugeben, weil sie dieser Grundforderung unserer wissenschaftlichen Arithmetik nicht genügen, denn sie sind von der Natur gegeben, und ihre Erkenntnis ist unentbehrlich für das Eindringen in die Natur der Kreisteilungsgleichungen, überhaupt für die gesamte Algebra und besonders für den Fermatschen Satz und die höheren Reziprozitätsgesetze, welche schon damals Kummer als sein höchstes wissenschaftliches Ziel vorschwebten. Aber ein weniger tiefgehender Denker würde vielleicht für seine Person sich von dieser Aufgabe zurückgezogen haben; dieser Gedanke kommt Kummer nicht. Andererseits würde vielleicht mancher andere versucht haben, demselben Probleme von einer anderen Seite beizukommen, aber auch das widerstrebt Kummer;

er versucht es vielmehr, den Bereich dieser Zahlen in α so zu modifizieren, daß das Fundamentalgesetz der wissenschaftlichen Zahlenlehre, die eindeutige Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfaktoren, doch erhalten bleibe.

Allmählich schält sich aus den jahrelangen Bemühungen Kummers um diese ungeheuerliche Eigenschaft der Zahlen in α, daß sie auf verschiedene Arten in Primzahlen zerlegt werden können, die Überzeugung heraus, der Grund liege einfach darin, daß der Bereich der Zahlen in α zu klein sei, um ihre wirklichen Primzahlen, ihre einfachsten Elemente zu enthalten. Uns, die wir auf den Schultern Kummers stehen, ist es verhältnismäßig leicht, schon aus dem Bereiche unserer gewöhnlichen ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . . durch Weglassung gewisser Zahlen einen engeren Bereich herzustellen, welcher genau dieselben merkwürdigen Eigenschaften besitzt, wie der Bereich der Zahlen in α, und bei dem auch weiter die Richtigkeit aller Kummerschen Sätze über jene Zahlen ganz einfach erkannt werden kann. Deshalb will ich Ihnen einen solchen Bereich bilden.

Denken Sie sich jede von den Zahlen 1, 2, 3, . . . in ihre gleichen oder verschiedenen Primfaktoren zerlegt, so kann man sie in zwei Klassen K_0 und K_1 scheiden, wenn man festsetzt, K_0 soll aus allen Zahlen bestehen, welche eine gerade Anzahl von gleichen oder verschiedenen Primfaktoren enthalten, K_1 aus denjenigen, welche eine ungerade Anzahl von Primfaktoren besitzen. Also K_0 und K_1 enthalten die Zahlen:

$$K_0 = (1,\ \underset{2\cdot 2}{4},\ \underset{2\cdot 3}{6},\ \underset{3\cdot 3}{9},\ \underset{2\cdot 5}{10},\ \underset{2\cdot 7}{14},\ \underset{3\cdot 5}{15},\ \underset{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{16},\ \underset{3\cdot 7}{21},\ \underset{2\cdot 11}{22},\ \underset{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{24},\ \ldots)$$

$$K_1 = (2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \underset{2\cdot 2\cdot 2}{8},\ 11,\ \underset{2\cdot 2\cdot 3}{12},\ 13,\ 17,\ \underset{2\cdot 3\cdot 3}{18},\ 19,\ \underset{2\cdot 2\cdot 5}{20},\ \ldots).$$

Die Klasse K_1 enthält unter anderen alle Primzahlen im gewöhnlichen Sinne. Nun wollen wir nur die Zahlen der ersten Klasse K_0 betrachten, also annehmen, daß uns die von K_1 gar nicht zugänglich wären, aber wir wollen trotzdem manchmal von ihnen sprechen. Dann sind unzerlegbare Zahlen in K_0 selbst alle und nur die, welche nur aus zwei gleichen oder verschiedenen Primfaktoren bestehen, also z. B. die Zahlen 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, . . .; denn zerfiele eine solche Zahl in zwei Faktoren in K_0, so müßte jeder einzelne von diesen Faktoren mindestens zwei, jene Zahl selbst also mindestens vier Primzahlen enthalten, während diese selbst nur aus zwei Primteilern bestehen. Dagegen sind zerlegbar in K_0 alle und nur diejenigen, welche, wie

z. B. 16, 24, 36, 40, ..., vier, sechs oder mehr Primfaktoren enthalten. Es ist nun klar, daß hier jede zusammengesetzte Zahl stets aber im allgemeinen auf mehrere Arten in unzerlegbare Faktoren in K_0 dekomponiert werden kann. So bestehen z. B. für die Zahl $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ von K_0 die folgenden drei Zerlegungen in unzerlegbare Faktoren:

$$210 = (2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 7) = (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5)$$
$$= 6 \cdot 35 = 10 \cdot 21 = 14 \cdot 15$$

Es tritt also hier genau dasselbe Unglück ein, wie im Gebiete der Zahlen in α, und daher gelten die Gesetze der Arithmetik im Bereiche K_0 ebensowenig, wie im Bereiche der Zahlen in α.

Kummer stellte sich jetzt das Problem so: Wie muß man den Bereich der Zahlen in α erweitern, damit in dem größeren Bereiche die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren eine eindeutige ist? Sie sehen, in unserem Gebiete K_0 würde die Aufgabe vollständig gelöst sein, wenn wir noch die Zahlen von K_1 hinzunähmen; tut man das nämlich, so sind ja z. B. alle jene drei Zerlegungen von 210 identisch, denn sie sind alle gleich

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

In unserem einfachen Falle würde also die Lösung des Kummerschen Problems folgendermaßen lauten:

Nimmt man zu den Zahlen 1, 4, 6, 9, 10, ... des Bereiches K_0 alle und nur die Zahlen 2, 3, 5, 7, 8, ... des Bereiches K_1 hinzu, so gelten in dem erweiterten Zahlenreiche alle Gesetze der elementaren Arithmetik, speziell der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfaktoren.

Dieselbe Frage hat nun Kummer für den Bereich der Zahlen in α vollständig gelöst, und er nannte die neuen Divisoren, welche hier den Zahlen in K_1 entsprechen würden, ideale Divisoren, weil sie eben im Gebiete der Zahlen in α nicht existieren; speziell nannte er die Primdivisoren, welche also unseren Primzahlen 2, 3, 5, ... innerhalb K_1 entsprechen, die idealen Primfaktoren; die Zahlen oder Divisoren in α nannte er wirkliche Zahlen. Auch in unserem Beispiele will ich in der Folge die Zahlen von K_0 die wirklichen, die von K_1 die idealen Zahlen nennen, und speziell sollen die in K_1 befindlichen gewöhnlichen Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... die idealen Primfaktoren oder Primdivisoren heißen.

Kummer zeigte also, daß man den Bereich der wirklichen Zahlen oder der Divisoren in α durch Hinzunahme der idealen Divisoren so erweitern kann, daß im erweiterten Gebiete aller wirklichen und idealen

Zahlen jede Zahl und jeder Divisor auf eine und jetzt nur auf eine Weise als Produkt gleicher oder verschiedener Primfaktoren dargestellt werden kann, und daß also in diesem erweiterten Gebiete nun im wesentlichen alle multiplikativen Gesetze der elementaren Arithmetik gelten.

Die Untersuchung der Zahlen in α lehrt dann wirklich, daß der Grund, warum in diesem ursprünglichen Bereiche jede Zahl im allgemeinen auf mehrere Arten in unzerlegbare Faktoren zerfällt, wörtlich derselbe ist, wie der soeben für die Zahlen innerhalb K_0 gefundene.

Will man mit den idealen Primzahlen genau ebenso rechnen, wie mit den gewöhnlichen rationalen Primzahlen, so muß man zuerst ein Mittel angeben können, um zu entscheiden, ob und wann eine beliebige wirkliche Zahl durch einen bestimmten idealen Primfaktor teilbar ist. Die geniale Art, auf welche KUMMER dieses Grundproblem im Bereiche der Zahlen in α gelöst und damit die Existenz der idealen Zahlen erst in Evidenz gesetzt hat, läßt sich in unserem einfachen Beispiele leicht anschaulich machen. Wir stellen uns die Aufgabe, allein im Bereiche der „wirklichen" Zahlen von K_0 zu entscheiden, ob irgend eine derselben a einen idealen Primteiler, etwa die Primzahl 2, enthält oder nicht, ob also der Quotient $\frac{a}{2}$ ganz oder gebrochen ist. Nun ist aber $\frac{a}{2}$ dann und nur dann ganz, wenn auch

$$\frac{5a}{2} = \frac{(5 \cdot 3) \cdot a}{(2 \cdot 3)}$$

ganz ist, und da in dem rechts stehenden Bruche im Zähler und Nenner allein „wirkliche" Zahlen des Bereiches K_0 stehen, so kann diese Frage allein in diesem Bereiche durch Probieren entschieden werden. Dasselbe Resultat läßt sich offenbar auch so aussprechen: Anstatt a durch die ganze ideale Zahl 2 zu dividieren, teile ich sie durch die gebrochene Zahl

$$\frac{2}{5} = \frac{(2 \cdot 3)}{(5 \cdot 3)}$$

welche, wie die rechte Seite dieser Gleichung zeigt, als wirkliche gebrochene Zahl darstellbar ist und welche in ihrer gehobenen Form allein den idealen Primteiler 2 als Zähler besitzt. Dann ist die Zahl a stets und nur dann durch 2 teilbar, wenn sie durch den wirklichen Bruch $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3}$ divisibel ist. Allgemeiner ist a stets und nur dann z. B. durch 2^7 teilbar, wenn dasselbe für den Bruch

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{(2 \cdot 3)^7}{(5 \cdot 3)^7}$$

gilt, wenn also der Quotient

$$\frac{(5\cdot 5)^f\, a}{(2\cdot 3)^f}$$

eine ganze Zahl von K_0 ist.

Genau ebenso kann man für den Bereich der wirklichen Zahlen in c, anstatt eine wirkliche Zahl a in c durch eine ideale Primzahl $\mathfrak{p}$ zu dividieren, als Teiler irgendeinen gebrochenen Divisor $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{r}}$ wählen, dessen Zähler $\mathfrak{p}$ ist, während sein Nenner nur $\mathfrak{p}$ nicht enthalten darf. Immer kann man dann diesen Nenner außerdem noch so wählen, daß der Bruch $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{r}}$ durch Erweiterung mit einem geeigneten Divisor $\mathfrak{s}$ in einen wirklichen Bruch $\frac{p}{r}$ in c übergeht, so daß also

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}{\mathfrak{r}\mathfrak{s}} = \frac{p}{r}$$

ist. Daher kann man genau wie in unserem Beispiel den Satz aussprechen:

Eine wirkliche Zahl a in c ist dann und nur dann durch den idealen Primdivisor $\mathfrak{p}$ teilbar, wenn sie den wirklichen gebrochenen Divisor $\frac{p}{r}$ enthält, oder, was dasselbe ist, wenn ra durch p teilbar ist. Allgemeiner ist a durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar, wenn $r^e a$ die wirkliche Zahl p^e enthält.

Damit wäre nun aber nicht viel gewonnen, wenn man nicht diese idealen Divisoren allein durch die wirklichen Zahlen in c auch darstellen könnte; aber diese Darstellung gelingt KUMMER ebenfalls auf einem bewundernswert einfachen Wege, und auch dieser läßt sich in unserem Beispiele in sehr anschaulicher Weise angeben.

In diesem Beispiele besteht nämlich der Bereich K_0 aller wirklichen Zahlen aus den Zahlen

$$1,\quad 2\cdot 2,\quad 2\cdot 3,\quad 3\cdot 3, \ldots$$

mit einer geraden Anzahl von Primfaktoren, der Bereich K_1 aller idealen Zahlen aus denjenigen:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11, \ldots,$$

welche eine ungerade Anzahl von Primfaktoren enthalten, und die Aufgabe ist hier die, alle Zahlen des Bereiches K_1 durch Zahlen von K_0 darzustellen. Hier liegt die Lösung auf der Hand: Ist z. B. $30 = 2\cdot 3\cdot 5$ eine solche ideale Zahl von K_1, so ist ihr Quadrat $30^2 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$ eine Zahl von K_0, d. h. eine wirkliche Zahl, da sie eine gerade Anzahl von Primfaktoren enthält.

Das Quadrat a^2 einer jeden idealen Zahl ist also eine wirkliche Zahl A, jede ideale Zahl ist gleich der Quadratwurzel aus einer wirklichen Zahl.

Ist schon a selbst eine wirkliche Zahl, so ist natürlich ihr Quadrat $a^2 = A$ auch wirklich. Das Quadrat jeder idealen oder wirklichen Zahl ist demnach stets eine wirkliche Zahl. Um also alle idealen und wirklichen Zahlen zu erhalten, braucht man zu den wirklichen Zahlen nur noch gewisse Quadratwurzeln aus denselben hinzuzunehmen. Eine sehr leichte Überlegung zeigt auch, was hier nur erwähnt sei, aus welchen Zahlen von K_0 die Quadratwurzel ausgezogen werden muß, um alle idealen Zahlen von K_1 zu erhalten.

Damit ist nun die Frage, wie man entscheiden kann, ob irgendeine wirkliche Zahl b von K_0 durch eine ideale oder eine wirkliche Zahl a teilbar ist oder nicht, in anderer Weise als vorher vollständig gelöst. Ist nämlich a auch wirklich, so kann diese Frage durch einfaches Probieren entschieden werden. Ist das aber nicht der Fall, so ist ja $\frac{b}{a}$ nur dann ganz, wenn $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ganz ist, und da a^2 dann wirklich ist, so kann auch in diesem Falle die Frage durch einfaches Probieren gelöst werden.

Wir können dieses Ergebnis auch so aussprechen: Wir haben alle wirklichen und idealen Zahlen in die beiden Klassen K_0 und K_1 gesondert, von denen die erste, die sog. Hauptklasse, alle wirklichen, die zweite alle idealen Zahlen enthält. Multipliziert man jede Zahl von K_0 mit jeder Zahl von K_1, so gehören alle diese Produkte einer und derselben Klasse, nämlich der Klasse K_1 an, da jedesmal der erste Faktor eine gerade, der zweite eine ungerade Anzahl von Primfaktoren enthält. Ebenso gehört jedes Produkt aus je zwei Faktoren von K_1 zu K_0, und jedes Produkt von je zwei Faktoren von K_0 ebenfalls zu K_0. Diese Klasseneinteilung ist also derart, daß alle Produkte, welche ich erhalte, wenn ich jedes Element einer Klasse mit jedem Elemente derselben oder der anderen Klasse multipliziere, stets in einer und derselben Klasse vorkommen.

Kummer hat nun gezeigt, daß wörtlich dieselben Verhältnisse für den Bereich der wirklichen und idealen Zahlen in α bestehen; nur sind hier die Beziehungen viel komplizierter, und der Beweis, daß hier dasselbe einfache Einteilungsgesetz für diese Zahlen herrscht wie in unserem Beispiel, war wohl eine der größten mathematischen Leistungen aller Zeiten.

Nimmt man zum Bereich der Zahlen in α oder zu den wirklichen Divisoren noch die Gesamtheit aller idealen Divisoren hinzu, so erhält

man nämlich einen sehr viel größeren Divisorenbereich, welchen man genau wie in unserem einfachen Beispiele ebenfalls in Klassen einteilen kann. Nur ist die Anzahl dieser Klassen nicht wie dort gleich zwei, sondern im allgemeinen größer, aber, was besonders wichtig ist, immer eine endliche Zahl. Ich will mit KUMMER die Anzahl dieser Klassen durch H und diese Klassen selbst durch

$$K_0, K_1, K_2, \ldots K_{H-1}$$

bezeichnen. Die Klasse K_0, die sog. Hauptklasse, enthält wie in unserem Beispiele alle wirklichen Divisoren, d. h. alle diejenigen, welche den Zahlen in α selbst entsprechen, die übrigen Divisoren verteilen sich auf die $H-1$ übrigen Klassen.

Auch hier ist jedes Produkt $\beta\gamma$ irgend zweier Zahlen der Hauptklasse K_0 wieder eine Zahl in K_0, da dieses ja wieder eine Zahl in α ist. Sind aber allgemein H_i und H_k zwei beliebige Divisorenklassen, und bedeuten $\mathfrak{D}_i$ und $\mathfrak{D}_k$ alle Divisoren derselben, so ist auch hier die Klasseneinteilung so gemacht, daß alle Produkte $\mathfrak{D}_l = \mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_k$ wiederum einer und derselben Klasse H_l angehören, welche durch die Klassen H_i und H_k bestimmt ist, genau wie in unserem einfachen Beispiel.

Ebenso wie oben das Quadrat jeder Zahl aus K_0 oder aus K_1 der Hauptklasse K_0 angehörte, kann hier allein aus der soeben angegebenen Fundamentaleigenschaft unserer Klasseneinteilung gefolgert werden, daß jeder ideale Divisor $\mathfrak{D}$ zur H^{ten} Potenz erhoben sicher einen Divisor D der Hauptklasse K_0, also eine wirkliche Zahl in α ergibt. Jeder ideale Divisor $\mathfrak{D}$ selbst ist also gleich $\sqrt[H]{D}$, d. h. gleich der H^{ten} Wurzel aus einer wirklichen Zahl. Man erhält also alle wirklichen oder idealen Zahlen in α, wenn man zu den Zahlen in α noch H^{te} Wurzeln aus gewissen Zahlen hinzunimmt.

Dieses Resultat gibt uns ein neues Mittel, um zu erkennen, ob eine beliebige Zahl β durch einen Divisor $\mathfrak{D}$ teilbar ist oder nicht, denn der Quotient $\frac{\beta}{\mathfrak{D}}$ ist dann und nur dann ganz, wenn das gleiche für seine H^{te} Potenz $\frac{\beta^H}{\mathfrak{D}^H} = \frac{\beta^H}{D}$ gilt, und diese Frage kann durch einfache Division entschieden werden.

Wie wir gesehen haben, muß die H^{te} Potenz jeder idealen Zahl wirklich sein. Dies braucht aber auch hier nicht die niedrigste Potenz zu sein, denn wenn z. B. $\mathfrak{D}$ selbst wirklich ist, ist es eben schon die erste. Ist aber $\mathfrak{D}^h$ die kleinste Potenz von $\mathfrak{D}$, die wirklich ist, so erkennt

man leicht, daß h ein Teiler von H sein muß. Ebenso leicht kann man schließen: Ist $\mathfrak{T}^r$ wirklich und hat r mit H keinen gemeinsamen Teiler, so muß $\mathfrak{T}$ selbst wirklich sein. So erkennt man in unserem Beispiele, daß, falls für eine gewöhnliche rationale Zahl $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{T}^r$ zur Hauptklasse K_0 gehört, also eine gerade Anzahl von Primfaktoren besitzt und r ungerade ist, $\mathfrak{T}$ selber der Hauptklasse angehören muß, da, falls $\mathfrak{T}$ eine ungerade Anzahl von Primfaktoren hätte, dasselbe für jede Potenz $\mathfrak{T}^r$ mit ungeradem Exponenten gelten würde. Auf dieser wichtigen Tatsache beruht fast allein die Möglichkeit, den FERMATschen Satz zu beweisen.

Die Klassenanzahl H der Divisoren in α ist die wichtigste Zahl der ganzen Theorie. Ist sie gleich 1, so gibt es eben gar keine idealen Zahlen, denn dann existiert nur die eine Klasse K_0 der wirklichen Zahlen. Dann enthält diese auch alle Primfaktoren; dann und nur dann sind alle Zahlen in α auf eine einzige Weise in w i r k l i c h e Primfaktoren zerlegbar. Nur in diesem Falle gelten alle Gesetze der elementaren Arithmetik schon für die wirklichen Zahlen in α, nur dann ist also die Theorie der idealen Zahlen überflüssig.

Die wirkliche Berechnung dieser Klassenanzahl für bestimmte Gleichungen $\alpha^\lambda = 1$ ist eine der schwierigsten Aufgaben der ganzen Zahlentheorie. Ihre Lösung ist KUMMER, wie bereits erwähnt, durch die Methoden seines großen Lehrers DIRICHLET gelungen. Ich muß es mir versagen, an dieser Stelle auf die wunderbar feinen Methoden DIRICHLETS einzugehen, durch welche er der Zahlentheorie ganz neue Wege eröffnete, indem er die gewaltigen Hilfsmittel der Analysis in ihren Dienst zwang. Es sind das diejenigen Methoden, welche der uns leider zu früh entrissene HERMANN MINKOWSKI durch seine Geometrie der Zahlen zu so hoher Einfachheit und vollendeter Schönheit ausgebildet hat.

Ich möchte hier nur erwähnen, daß nach der KUMMERschen Darstellung die Klassenzahl H aus zwei Faktoren besteht, von denen der erste verhältnismäßig sehr leicht, der letzte sehr schwer zu berechnen ist. Es ist von großer Wichtigkeit, daß für die meisten Anwendungen nur die Kenntnis des ersten Faktors der Klassenzahl nötig ist.

Nur ein großer Geist und eine reiche Phantasie konnte in einem Gebiete, in welchem alles regellos jeder Ordnung zu spotten schien, das tiefverborgene aber so einfache Gesetz ahnen; es erforderte eine unbeugsame Energie, auf diesem mühevollen Wege nicht mutlos stehen zu bleiben; haben doch die arithmetischen Arbeiten KUMMERS zwanzig

seiner besten Jahre gefordert. Aber der Erfolg war den hohen Einsatz wert, denn die hier dargelegten Prinzipien KUMMERS haben seitdem die ganze Arithmetik und Algebra beherrscht; es hat sich nämlich gezeigt, daß sie nicht bloß für die hier betrachteten Bereiche der Zahlen in α gelten, sondern für alle algebraischen Bereiche. KUMMER selbst hat zwar seine Theorie nur so weit ausgedehnt, als es die von ihm behandelten Probleme nötig machten; er war sich wohl bewußt, daß sie allgemeingültig waren, er sprach es aber aus, daß es ihm genüge, diese Schönheiten im einzelnen geschaut und völlig erkannt zu haben.

Bei allen seinen zwanzigjährigen Arbeiten über die Arithmetik waren es immer zwei bestimmte Probleme, deren vollständige Lösung ihm als höchstes Ziel vor Augen stand; um ihretwillen hat er sein gewaltiges Lehrgebäude aufgerichtet. Er hat es selbst ausgesprochen, daß er seine Theorie der idealen Zahlen trotz ihrer Erfolge vielleicht doch verworfen haben würde, wenn er ein anderes Mittel gewußt hätte, den FERMATschen Satz und das allgemeine Reziprozitätsgesetz zu beweisen. Wir, denen die KUMMERsche Theorie als der festeste Grundstein der Arithmetik erscheint, werden wohl anderer Ansicht sein; wir werden es umgekehrt dem FERMATschen Probleme danken, daß durch dieses der Geist eines KUMMER so gewaltig angeregt worden ist, daß wir die Idealtheorie erhalten haben.

Lassen Sie mich nur einen Blick auf die Art werfen, wie KUMMER mit Hilfe der Idealtheorie der allgemeine Beweis des FERMATschen Satzes gelang. KUMMER führt noch allgemeiner den Beweis, daß es unmöglich ist, die Gleichung

$$x^\lambda = y^\lambda + z^\lambda$$

nicht bloß im Bereiche der ganzen Zahlen, sondern sogar in dem größeren Gebiete der Zahlen in α zu lösen. Schreibt man diese Gleichung wieder in der multiplikativen Form

$$z^\lambda = x^\lambda - y^\lambda = (x - y)(x - \alpha y) \cdots (x - \alpha^{\lambda - 1} y) = b_0 b_1 \cdots b_{\lambda - 1},$$

so haben wir die λ^{te} Potenz z^λ als Produkt von λ Zahlen b_r in α dargestellt. Von diesen λ Zahlen wollen wir jetzt annehmen, daß nicht zwei von ihnen eine und dieselbe Primzahl gemeinsam haben, daß je zwei also aus lauter verschiedenen idealen oder wirklichen Primfaktoren bestehen. Man kann zeigen, daß diese Annahme entweder erfüllt ist, oder daß, falls dies nicht der Fall sein sollte, die ursprüngliche Gleichung anderweitig so umgeformt werden kann, daß eine entsprechende Voraussetzung erfüllt ist.

Ist aber das Produkt $b_0 b_1 \cdots b_{\lambda-1}$, dessen Faktoren sämtlich verschiedene Primteiler enthalten, eine λ^{te} Potenz, so muß jeder Faktor für sich eine λ^{te} Potenz sein.*) Zu jedem Faktor b_r gehört also ein Divisor $\mathfrak{D}_r^\lambda$, welcher die λ^{te} Potenz eines anderen ist. Von diesem Divisor $\mathfrak{D}_r$ kann man nun folgendes aussagen: Seine λ^{te} Potenz ist die wirkliche Zahl b_r in α. Ist also λ kein Teiler der Klassenzahl H, so folgt nach dem vorher erwähnten Hauptsatz, daß auch $\mathfrak{D}_r$ selbst wirklich sein muß; allerdings ist diese Folgerung auch nur in diesem Falle gestattet. Ist also λ kein Teiler der Klassenzahl, so ist b_r gleich der λ^{ten} Potenz einer wirklichen Zahl d_r, eventuell multipliziert mit einer andern wirklichen Zahl, welche keinen einzigen Teiler mehr hat, einer sog. Einheit. Es ist also für alle λ Faktoren

$$b_r = x - \alpha^r y = e_r d_r^\lambda \qquad (r = 0, 1, \ldots \lambda - 1),$$

wo e_r eine Einheit bedeutet; und aus diesen λ Gleichungen für die beiden Unbekannten x und y folgt durch einfache Rechnung, daß sie unmöglich bestehen können, weil durch sie x und y überbestimmt sind. Damit ist der FERMATsche Satz bewiesen.

Nur dann ist also das FERMATsche Problem durch KUMMERS Betrachtungen gelöst, wenn die Klassenzahl H für die λ^{ten} Einheitswurzeln nicht durch λ teilbar ist. Daraus folgt, daß man für jede Primzahl λ die zugehörige Klassenzahl auf ihre Teilbarkeit oder Nichtteilbarkeit durch λ untersuchen muß. Hier gelingt es nun KUMMER, vor allen Dingen zu beweisen, daß H dann und nur dann durch λ teilbar ist, wenn ihr leicht zu bestimmender erster Faktor bereits λ enthält. Nur dieser muß also für alle Primzahlen $\lambda = 3, 5, 7, 11, \ldots$ berechnet werden, und diese von KUMMER für die im ersten Hundert auftretenden Primzahlen durchgeführte Rechnung ergab, daß hier nur für die drei Primzahlen

$$\lambda = 37, \quad \lambda = 59, \quad \lambda = 67$$

die Klassenzahl durch λ teilbar ist. So ist es also z. B. hiernach nicht

*) Der Satz, daß ein Produkt mehrerer Faktoren, welche keinen unzerlegbaren Bestandteil gemeinsam haben, nur dann eine λ^{te} Potenz sein kann, wenn dasselbe für jeden dieser Faktoren der Fall ist, gilt nur dann, wenn die Zahlen des Bereiches nur auf eine Weise in unzerlegbare Faktoren dekomponiert werden können. So gilt in unserem einfachen Beispiel die Gleichung:

$$(2 \cdot 3)(3 \cdot 5)(5 \cdot 7)(7 \cdot 2) = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2,$$

d. h. das Produkt der vier links stehenden Faktoren von K_0 ist einer Quadratzahl gleich, während die vier Faktoren $(2 \cdot 3), \ldots$ innerhalb K_0 sogar unzerlegbar, also sicher keine Quadratzahlen sind.

sicher, ob die Fermatsche Gleichung

$$x^{37} = y^{37} + z^{37}$$

niemals eine Lösung haben kann. Für alle übrigen 22 Primzahlen aus dem ersten Hundert ist dieser wichtige Satz jedoch mit einem Schlage bewiesen, aber auch für sehr viele andere Exponenten λ über Hundert hinaus.

Allerdings zeigte es sich, daß diese Ausnahmezahlen, für welche H durch λ teilbar ist, um so häufiger auftraten, je weiter man in der Reihe der Primzahlen ging; so finden sich unter den ersten 13 Primzahlen des zweiten Hundert schon 5 Ausnahmezahlen, und nach einer Bemerkung Kummers kann es als wahrscheinlich angesehen werden, daß zuletzt ungefähr ebensoviele Primzahlen existieren, welche regulär, als solche, welche irregulär sind. Dann konnte Kummer sich also rühmen, den Fermatschen Satz in der Hälfte aller Fälle bewiesen zu haben.

Es ist nun noch Kummer gelungen, durch eine bewunderungswürdige Verfeinerung seiner Methode auch für eine große Zahl von den bisher auszunehmenden Primzahlen, insbesondere für $\lambda = 37, 59, 67$ die Unmöglichkeit der Fermatschen Gleichung zu beweisen. Aber immer noch harren sehr viele, wahrscheinlich sogar unendlich viele einzelne Fermatsche Probleme ihrer endgültigen Lösung, und man muß es sagen, daß es den heißen Bemühungen der besten Arithmetiker seit Kummer bisher nicht gelungen ist, die Unlösbarkeit auch nur einer der von Kummer ausgeschlossenen Fermatschen Gleichungen vollständig zu erweisen. Allerdings wurden in den letzten Jahrzehnten einerseits die großen Kummerschen Gedanken über die idealen Zahlen so ausgebildet und verfeinert, andererseits die speziellen Kriterien Kummers für die Ausnahmezahlen λ zum Teil so wesentlich vereinfacht, daß die Hoffnung berechtigt erscheint, daß dieses große Werk Kummers auch einmal ganz zu Ende geführt werden wird.

Nur kurz kann ich hier darauf eingehen, wie die Theorie der idealen Zahlen es Kummer nun auch ermöglichte, das zweite Ziel seiner Sehnsucht, die Aufstellung und den Beweis der in der Arithmetik vorkommenden allgemeinen Reziprozitätsgesetze in demselben Umfange zu erreichen, wie ihm die Lösung des Fermatschen Problems gelungen war.

Das quadratische Reziprozitätsgesetz im Bereiche der natürlichen ganzen Zahlen, welches ich hier als bekannt voraussetze, stellt sich in seiner vollen Einfachheit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

erst dann dar, wenn die beiden untersuchten Zahlen p und q einmal als Primzahlen und zweitens als primär vorausgesetzt werden, wenn sie nämlich mit der Einheit $+1$ oder mit der Einheit -1 multipliziert, d. h. positiv oder negativ angenommen werden, je nachdem sie absolut genommen von der Form $4n+1$ oder $4n-1$ sind.

Gauss war es, welcher erkannt hatte, daß die entsprechende Frage für die biquadratischen Reste und Nichtreste erst dann einfach gelöst werden kann, wenn man anstatt des Bereiches der gewöhnlichen ganzen Zahlen den ihn umfassenden der komplexen Zahlen $a+bi$ arithmetisch untersucht; nur mußten hier wieder statt der reellen Primzahlen p und q zwei der bereits früher a. S. 20 erwähnten komplexen Primzahlen π und $\varkappa$ dieses Bereiches zugrunde gelegt werden. Ferner aber treten in dieser Theorie statt der zwei Einheiten ± 1 deren vier, nämlich $+1, -1, +i, -i$ auf, und unter den vier hier möglichen Werten, welche aus jeder der beiden Primzahlen durch Multiplikation mit einer dieser Einheiten hervorgehen, mußte wieder die sog. primäre Form für diese Primzahl so ausgewählt werden, daß der Ausdruck für das biquadratische Gesetz möglichst einfach wurde; denn auch hier haben jene Primzahlen in Beziehung darauf, ob sie Reste oder Nichtreste füreinander sind, ganz andere Charaktere, je nachdem man die Einheit wählt, mit der sie behaftet sind.

Auf dieser Grundlage gelang es Gauss und Dirichlet, zu zeigen, daß für geeignet gewählte primäre Primzahlen genau dasselbe biquadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)$$

gilt; und ganz dasselbe ist, wie Jacobi und später Eisenstein nachwiesen, für das kubische Reziprozitätsgesetz der Fall, sobald man hier alle ganzen Zahlen des Bereiches der dritten Einheitswurzeln betrachtet, welche sich ebenfalls eindeutig in wirkliche Primzahlen zerlegen lassen, und wenn man dann jede dieser Primzahlen in einer geeigneten primären Form annimmt, indem man die zu ihr gehörige Einheit unter den sechs hier vorhandenen passend auswählt.

Die Gründe, warum die aus der Anregung von Gauss hervorgegangenen Beweise des kubischen und des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes trotz der Anstrengungen von Männern wie Jacobi und Eisenstein nicht auf die höheren Gesetze ausgedehnt werden konnten,

liegen darin, daß für die allgemeinen λ^{ten} Potenzreste, wo λ eine beliebige Primzahl ist, die Untersuchung erst einfach wird, wenn man wieder den vorher schon betrachteten Bereich der Zahlen in α oder der λ^{ten} Wurzeln der Einheit zugrunde legt. In diesem ist aber erstens die Zerlegung in Primfaktoren, wie bereits oben erwähnt wurde, im allgemeinen keine eindeutige, und zweitens ist von $\lambda = 5$ an die Anzahl der Einheiten in α unendlich groß; und so fehlten hier zunächst die beiden Vorbedingungen für die Aufstellung eines einfachen Reziprozitätsgesetzes.

Kummer hatte nun die erste Schwierigkeit durch die Einführung der idealen Primfaktoren und durch den Nachweis vollkommen beseitigt, daß sich dieselben als H^{te} Wurzeln aus wirklichen Zahlen darstellen lassen, wenn H die Klassenzahl bedeutet. Die zweite Schwierigkeit, welche in der geeigneten Wahl der den Primzahlen zuzuordnenden Einheiten bestand, konnte er überwinden, nachdem er mit Dirichlets Prinzipien gezeigt hatte, daß man alle Einheiten in α durch ein System von Fundamentaleinheiten einfach darstellen und sie so völlig beherrschen kann. Vollständig durchführen konnte er aber die Untersuchung auch hier nur unter der Voraussetzung, daß im Bereiche der gerade betrachteten Zahlen in α niemals die λ^{te} Potenz einer idealen Zahl eine wirkliche Zahl sein kann, oder was nach dem auf S. 28 erwähnten Satze ganz dasselbe ist, wenn λ keine der vorhin erwähnten Ausnahmezahlen ist, für welche die Klassenzahl H durch λ teilbar ist.

So hatte sich Kummer selbst die Mittel geliefert, um für alle regulären Primzahlen λ die Reziprozitätsgesetze für die λ^{ten} Potenzreste wenigstens aufzustellen. Die wesentliche Schwierigkeit lag hier in der Bestimmung derjenigen primären Form für die Primfaktoren, für welche das allgemeinste Reziprozitätsgesetz womöglich ebenso einfach würde, wie in den schon bekannten Fällen $\lambda = 2, 3, 4$. Mit einer geradezu staunenswerten Divinationsgabe hat Kummer diese Frage gelöst, und schon im Jahre 1847 stellte er dieses schönste und tiefste Gesetz der Zahlenlehre in seiner großartigen Einfachheit auf, ohne es allerdings damals schon beweisen zu können; aber er hatte seine Richtigkeit an einer Unzahl von Beispielen geprüft und zunächst diese Resultate im Jahre 1850 veröffentlicht. In dieser Fassung spricht sich das allgemeinste Theorem für alle regulären Primzahlen λ wörtlich ebenso aus, wie das gewöhnliche quadratische Fundamentaltheorem:

Sind nämlich π und $\varkappa$ zwei ideale oder wirkliche aber primäre Primzahlen in α, so besteht für das dem Legendreschen

analog gebildete Zeichen $\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)$ die Reziprozitätsgleichung

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right).$$

Von der Aufstellung dieses wundervollen Gesetzes bis zu seinem vollständigen Beweise lag noch ein weiter steiler Weg, die angestrengte Arbeit von neun Jahren. KUMMER mußte sehr bald erkennen, daß für diesen Beweis das Gebiet der wirklichen und idealen Zahlen in α zu klein war, obwohl das Gesetz selbst in diesem Bereich in vollster Einfachheit ausgesprochen werden konnte, daß es vielmehr nötig war, über diesem Zahlgebiete ein höheres dieses umfassendes Reich algebraischer Zahlen in derselben Weise aufzubauen, wie früher den Bereich der Zahlen in α über demjenigen der natürlichen Zahlen.

Dieses höhere Gebiet umfaßt außer den Zahlen in α noch die λ^{te} Wurzel aus einer bestimmten Zahl in α, und in ihm gelten alle Ergebnisse der KUMMERschen Idealtheorie in geeigneter Modifikation. Es gelang nun KUMMER nach mehrjähriger intensiver geistiger Arbeit in diesem noch nie durchforschten Gebiete, den schönsten und tiefsten zweiten GAUSSschen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, welcher auf der Theorie der quadratischen Formen und der Einteilung ihrer Klassen in Genera beruht, so zu verallgemeinern, daß er auch in diesem höheren Zahlenreiche anwendbar bleibt und hier den vollständigen Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes liefert.

Ebenso wie GAUSS bei seiner immer erneuten eindringenden Beschäftigung mit dem quadratischen Reziprozitätssatze nach dem ersten Beweise, in dem er in steilem Anstieg das Problem bezwungen hatte, noch andere und andere Beweise desselben Satzes erschließen konnte, fügte auch KUMMER diesem ersten schwierigsten Beweise seines allgemeinsten Satzes noch zwei andere in mancher Hinsicht einfachere hinzu. Der erste von ihnen beruht wesentlich auf der Theorie der zu dem erweiterten Zahlbereich gehörigen Einheiten und kann als eine Verallgemeinerung des zuerst unvollständig von LEGENDRE für das quadratische Gesetz gegebenen Beweises angesehen werden; der zweite hatte noch kein Vorbild unter den damals bekannten Beweisen für den Fall $\lambda = 2$, er liefert vielmehr auf diesen Fall angewendet einen neuen höchst einfachen Beweis dieses Gesetzes, und er selbst ist wohl der gedanklich einfachste unter den drei Beweisen KUMMERS. Während uns aber GAUSS im ganzen acht Beweise seines theorema fundamentale gegeben hat und die Anzahl der mehr oder weniger verschiedenen Beweise dieses einfacheren Problemes auf

etwa 50 gestiegen ist, sind diese drei großen Beweise KUMMERS für das allgemeine Reziprozitätsgesetz lange Zeit hindurch die einzigen geblieben, welche wir besitzen.

Erst in neuester Zeit sind auch diese KUMMERschen Untersuchungen, wesentlich durch die Arbeiten HILBERTS, in hohem Maße vereinfacht und gefördert worden, und es besteht die Hoffnung, daß auch hier die von KUMMER uns hinterlassenen ungelösten Probleme einmal ihrer vollständigen Lösung entgegengeführt werden können.

Es ist ein Zeichen für seine hohe Auffassung des Gelehrten- und Lehrerberufes, daß KUMMER drei Jahre nach der Feier seines fünfzigjährigen Doktorjubiläums, also im Jahre 1884, als Vierundsiebzigjähriger seine Vorlesungen an der Universität einstellte, nachdem er schon im Jahre 1878 das Sekretariat der Akademie niedergelegt hatte. Er wollte nur so lange als Lehrer wirken, als er dies im höchsten Sinne tun konnte, er wollte nach beispielloser Arbeit und beispiellosen Erfolgen die letzten ihm noch beschiedenen Jahre seiner geliebten Frau, seinen Kindern leben, denen durch sein ganzes Leben seine größte Liebe und Sorgfalt gewidmet gewesen war. Jetzt wollte er sich noch einmal in die Schätze der deutschen und englischen Literatur, besonders in GOETHE und SHAKESPEARE, die ihn durch sein ganzes Leben begleitet hatten, versenken, jetzt noch, so oft es ihm vergönnt wäre, die geliebten Berge Schlesiens aufsuchen, zu denen ihn immer und immer wieder seine Sehnsucht hinzog. Und ein gütiges Geschick hat es gewollt, daß auch diese seine letzten Wünsche schön und voll in Erfüllung gingen. Ebenso wie es KUMMER beschieden war, uns in seiner Wissenschaft alles geben zu können, was er ersehnte, so daß sich nach seinem Tode nichts Angefangenes oder Unfertiges vorfand, konnte er seinen Lebensabend, sein wohlerworbenes ruhiges abgeklärtes Glück noch neun Jahre in voller geistiger Frische genießen.

Langsam nur, ganz langsam beugte sich die hohe schlanke Gestalt des ehrwürdigen Greises, wurde sein klares durchdringendes und doch so freundlich blickendes Auge trübe, langsam schwanden die Kräfte. Endlich raffte ihn die Influenza inmitten seiner Lieben am 14. Mai 1893 hinweg. An einem herrlichen sonnigen Tage im Mai wurden seine sterblichen Reste auf dem Jacobikirchhofe in die Gruft gesenkt, um welche sich alle versammelt hatten, die ihn lieb und wert hielten.

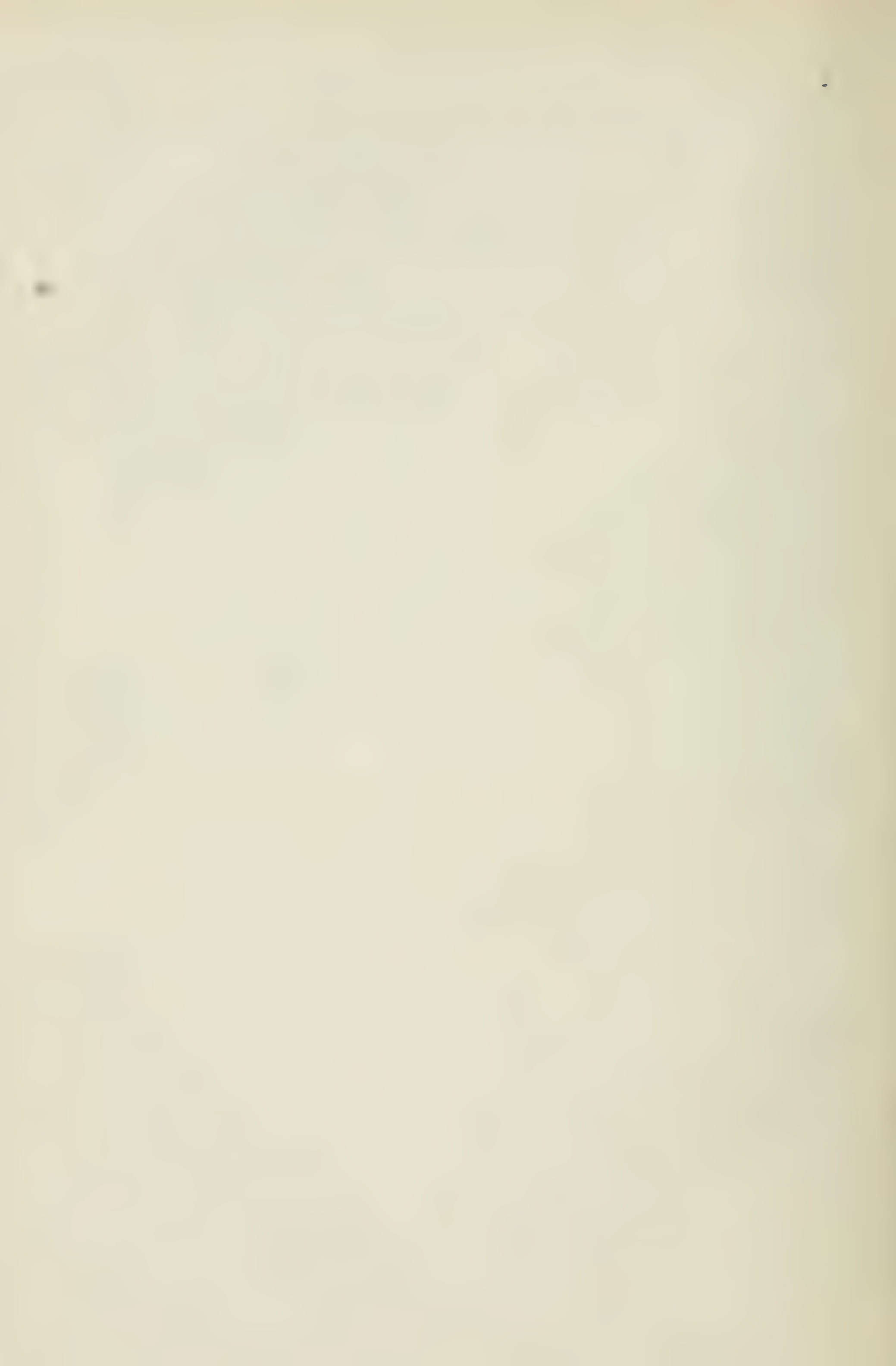
Aber wenn er auch den Seinigen, wenn er auch allen denen unter uns, die ihn kannten und verehrten, auf immer entrissen ist, so wird doch das Größte, was er erstrebt und erreicht hat, niemals verloren

gehen. In fast allen Natur- und Geisteswissenschaften ist alles in ewigem Wechsel; das, was in ihnen die Größten geschaffen, wodurch sie die Mitwelt unwiderstehlich mit sich fortgerissen haben, nach kurzer Zeit ist es zu seinem besten Teile veraltet, fast vergessen; es kann nicht weiter wirken, weil der ganze Bau der Wissenschaft, den eine Generation aufgeführt hat, von der nächsten niedergerissen werden muß, um von ihr neu und schöner wieder aufgeführt zu werden.

Das aber ist das Große in unserer Wissenschaft, daß alles, was in ihr einmal wahr und erhaben gewesen ist, immer wahr und erhaben bleiben wird, mag auch der Leib dessen, der es uns erkennen lehrte, lange in Staub zerfallen sein. Immer höher, schöner und einfacher steigt das Gebäude der Mathematik im Laufe der Jahrhunderte empor, und die großen Männer, denen es vergönnt war, dieses Gebäude in seiner Schönheit aufzuführen, werden nie und nimmer vergessen werden.

Wir werden wohl dahin kommen mit dem Rüstzeug, welches uns Kummer gegeben hat, manches zu erreichen, was er vielleicht ersehnt hat, manches anders und vielleicht einfacher zu sehen, als er es getan oder auch gewollt hat, aber für alle Zeiten werden die großen Ideen, die er in seiner vorwärtsstürmenden Jugend konzipierte, die er in seinem langen Gelehrtenleben mit wunderbarer geistiger Kraft durchdachte und ausreifen ließ, zu den Grundpfeilern gehören, auf denen das hehre Gebäude unserer Wissenschaft ruht und ohne die es nicht gedacht werden kann.

Berlin, den 7. Januar 1910.



BRIEFE ERNST EDUARD KUMMERS
AN SEINE MUTTER
UND AN LEOPOLD KRONECKER.

Aus dem reichen Schatze der in der vorstehenden Rede erwähnten Briefe KUMMERS an seine Mutter und an LEOPOLD KRONECKER veröffentliche ich mit gütiger Genehmigung der Besitzer, Frau Geheimrat KUMMER und Geh. Justizrat ERNST KRONECKER, diejenigen, welche mir für die Charakteristik des Mannes und des Forschers besonders wertvoll erscheinen.

Ich habe auch solche Briefe ausgewählt, welche erkennen lassen, in wie anstrengender Gedankenarbeit KUMMER zu den großen Resultaten aufsteigen mußte, welche uns aus seinen klassischen Schriften wohlbekannt sind, wie sogar manchmal seine Hoffnung, eine geahnte Gesetzmäßigkeit bestätigt zu finden, enttäuscht wurde, so aber daß sich an ihrer Stelle eine schönere und tiefere enthüllte. Mir scheint, daß gerade durch solche Einblicke in die Werkstatt seines Denkens die Ergebnisse seiner Arbeit einen neuen Reiz, einen höheren Wert erhalten.

Von einem Kommentar der Briefe glaubte ich absehen zu sollen, da durch ihn der Charakter dieser ganzen Festschrift wesentlich geändert worden wäre, ohne daß für denjenigen, der die Idealtheorie KUMMERS nicht kennt, durch solche Erläuterungen viel zum Verständnis beigetragen werden könnte. Dem Leser der Gedächtnisrede wird, so hoffe ich, vieles von dem mathematischen Inhalt der Briefe verständlich sein, und für den genauen Kenner der KUMMERschen Arbeiten wird ein besonderer Reiz dieser Briefe gerade in der Vergleichung der hier zuerst auftretenden manchmal noch unfertigen Gedanken mit der klassischen Form liegen, welche sie nachher in den Abhandlungen gewonnen haben.

Als schönsten Abschluß dieser Briefe habe ich das Schreiben veröffentlicht, mit welchem KRONECKER die Überreichung seiner Festschrift zu KUMMERS fünfzigjährigem Doktorjubiläum begleitete — ein seltenes Denkmal für einen seltenen Freundschaftsbund.

Marburg, den 17. Juli 1910.

K. Hensel.

Kummers Briefe an seine Mutter.

Halle, d. 8. Juli 1828.

Meine theuerste Mutter!

Sie haben uns durch die Ueberschickung des Geldes sehr erfreut, was mir aber das liebste war, das war, daß Sie meinen Entschluß nicht für Schwäche und Wankelmüthigkeit gehalten haben. Wahrlich es ist wohl nichts weniger als dieß, denn wäre ich wankelmüthig und schwach, so würde ich wohl nicht eine sichere Aussicht auf ein ruhiges sorgenloses bequemes Leben mit der unsicheren Aussicht auf eine Versorgung als Lehrer der Mathematik vertauschen, auch würde ich nicht das bei weitem leichtere Studium, was für ein Theologen-Examen gehört mit dem schwereren mathematischen vertauschen. — Glauben sie nicht daß ich von ängstigenden Zweifeln umstrickt sei, nein, es ist nie klarer vor meine Seele getreten daß der Mensch unter jeder Bedingung recht handeln soll ohne auf irgend einen Lohn zu sehen, aber ich halte nicht das äußere Glück für das höchste Gut des Menschen, sondern die Seelenruhe, welche aus dem Bewußtsein hervorgeht recht gehandelt zu haben. Solange ich dieß Bewußtsein habe werde ich mich nie von einem niedrigen Unmuthe hinreißen lassen an einem Gott und einer Unsterblichkeit zu verzweifeln, wenn ich auch auf dem Wege der Vernunft erkannt habe daß der Geist unsterblich ist, und daß ein Gott ist, welcher diesen Geist ins Dasein gerufen hat nicht um ihn zu vernichten, sondern um ihn zu seiner höchsten Vollkommenheit sich erheben zu lassen, in welcher seine Seeligkeit bestehen wird. Jetzt kann ich mit gutem Gewissen nicht fortfahren Theologie zu studiren, darum habe ich es aufgegeben, und habe mir die Mathematik erwählt, weil es die Wissenschaft ist, in welcher der tiefer forschende von andern nicht mißverstanden, oder für gottlos und schlecht gehalten wird sondern in welcher was einer wahres findet von allen anerkannt werden muß und anerkannt wird. Ich glaube sie werden meinen Entschluß

billigen, denn wahrlich er stammt aus reinen Beweggründen. . . . Nun leben Sie wohl meine theuerste Mutter; sehnlich hofft auf eine baldige Antwort Ihr Sie innig liebender Sohn

EDUARD KUMMER.

Halle, d. 5. Aug. 1831.

Meine innigst geliebte Mutter!

Vorgestern war ja nun jener wichtige Tag meines Ruhmes. Früh beendigte ich zuerst meine zweite Examenarbeit, ganz und gar, auch schon eingeschrieben, sodaß ich nun die Freude habe schon 2 Arbeiten fertig vor mir zu sehen. Um eilf Uhr sodann ging ich mit KARLEN auf das Waisenhaus, wo in einem sehr großen Saale eine lateinische Rede von einem der Professoren gehalten ward. Es war alles höchst feierlich, als wir ein Weilchen da waren, so kamen zuerst die 3 Pedelle jeder einen feuerrothen langen Mantel um und einen silbernen Scepter in der Hand, hinter diesen kam der Hr. Prorector HEFFTER (der Bruder des Sorauer HEFFTER) mit breitem Hut und Staatsdegen, und sodann die übrigen Professoren. Zuerst wurde mit Trompeten und Pauken ein Lied an den König gesungen, sodann bestieg der Redner den Katheder. Dieser brachte nun in seiner lateinischen Rede alle seit Jahrtausenden abgedroschenen Floskeln alle wieder einmal zum Vorschein, sodaß die lange Weile sehr arg war, besonders da er so undeutlich sprach, daß man auch von diesen nur wenig verstehen konnte. Als er endlich mit seiner Rede nach einer Stunde fertig war so kam er daran die eingegangenen Preisfragen zu beurtheilen, und die noch versiegelten Namen der Autoren zu entsiegeln und vorzulesen. Zuerst fielen die Theologen schmählich weg, denn 4 Theologische Arbeiten welche eingegangen waren fielen alle durch, die medicinische hatte keiner gemacht, die Juristische wurde unter zwei getheilt, welche ebenfalls nicht sonderlich gelobt wurden. Philologische waren zwei gegeben von denen eine nur bearbeitet worden war welche nur aus Gnaden den Preis bekam. Endlich unter allen zuletzt kam die Mathematische und der Redner drückte sich so aus, daß durch irgend ein Ohngefähr grade diejenige Arbeit zuletzt dran komme, welche von allen zuerst verdient hätte erwähnt zu werden. Er las nun das Urtheil über dieselbe vor, ich paßte zwar nicht wenig auf konnte aber von dem was er vorlas fast gar nichts hören, weil ich zu entfernt saß. Nachdem er das Urtheil vorgelesen hatte erbrach er meine Kapsel und las: ERNESTUS EDUARDUS

KUMMER, Soranus. Nach diesem glänzenden Schlusse wurde noch ein Lied gesungen und als das ganze aus war so kam zuerst der Professor SCHERK auf mich zu, umarmte und küßte mich und gratulirte mir zuerst, dann gratulirten mir auch noch einige andere Professoren und ich ging nach Hause ohne jedoch noch das Urtheil über meine Arbeit zu kennen, denn KARL, JACOBI, und mehrere andere hatten ebensowenig verstanden als ich. Heute aber war ich beim Hr. Prof. SCHERK und dieser sagte mir dann das Urtheil hätte ohngefähr so gelautet: Die Arbeit wäre in 2 Theile getheilt gewesen, im ersten Theile hätte der Verfasser das wiedergegeben was die Mathematiker schon früher über dieses Problem geschrieben hätten, und hätte dieß berichtigt, und vervollständigt. Im zweiten Theile sodann hätte der Verfasser seine eigenen Untersuchungen mit so großem Scharfsinn entwickelt, daß ihm schon um dieses einen Theiles willen der Preis hätte zuerkannt werden müssen. Dies ist aber das Urtheil nur ohngefähr, denn es war weit länger. In acht oder vierzehn Tagen erscheint nun ein Programm über das ganze Fest, worin die Sieger und die Urtheile abgedruckt sind, sobald dieß erschienen ist, so kaufe ich mir es natürlich und dann will ich ihnen auch eine genaue wörtliche Uebersetzung meines Urtheils zukommen lassen, denn dieß ist in lateinischer Sprache geschrieben. Ich werde mir nun nächstens meine 50 Thaler auszahlen lassen, und ruhig bis zu meiner Doctor-Promotion aufheben. Sobald ich nun mein Oberlehrerexamen fertig habe, so werde ich ihnen auf der Stelle meine Zeugnisse schicken, daß sie diese dem Hr. Rector geben und der kann dann unterdessen immer an das Ministerium schreiben während ich hier mein zweites Examen mache, denn es wäre sehr gut, wenn ich schon zu Michaelis, oder wenigstens bald nachher Stunden an der Schule geben könnte, daß ich wenn es nöthig ist nachher noch vor dem 23. Jahre mein Militärjahr abdienen kann. Ich mache nun noch frisch über meiner philologischen Arbeit, die philosophische ist wieder 11 Bogen stark. Meinen Preis können Sie dem Hr. Rector mittheilen welcher sich gewiß sehr darüber freuen wird. . . . Nun leben Sie recht wohl meine liebe Mutter, freuen Sie sich über meinen Preis, und noch mehr auf meine Ankunft. Denn es wird ja nun nicht mehr lange dauern, so wird in Ihren Armen liegen

Ihr Sie innig liebender Sohn
ED. KUMMER.

Für das schöne Tuch welches Sie uns geschickt haben und für das andere danke ich von Herzen.

[Halle, den 30. August 1831.]

Meine herzlich geliebte Mutter!

Es freut mich daß ich Ihnen nun auch mein glücklich überstandenes Examen melden kann, welches am Sonnabende war. Schon vor einer Woche hatte mir SCHERK gesagt daß auf den Sonnabend mein Examen sein sollte, aber ich wartete immer auf eine Citation bis Freitag früh, dann warf ich mich in Frack und ging selbst zum Vorsteher der Prüfungscommission, welcher vergessen hatte mich citiren zu lassen. Er sagte mir nun wer mich alles examiniren würde, und so hatte ich grade nur noch Zeit genug an diesem Morgen zu allen herumzulaufen. Hier kam mir das erstemal meine Preisschrift zustatten, denn da die Examinatoren alle bei der Vertheilung derselben zugegen gewesen waren und ihr großes Lob (welches immer noch nicht im Druck erschienen ist) gehört hatten, so schnitten sie mir erst darüber Elogen und meinten sie würden es nun in dem übrigen nicht so streng nehmen. Sonnabend früh um zehn Uhr wurde ich zuerst vom Professor GRUBER im Deutschen examinirt. Dieser lobte zuerst wieder meine philosophische Examenarbeit, daß ich eine große Kenntniß der Sachen und ein selbstständiges Urtheil vereinigt hätte und examinirte dann ein bischen deutsche Literatur. Sodann wurde ich von 11—12 in der Theologie examinirt, wo ich so glänzend bestand, daß ich ohne Spaß höchstwahrscheinlich den Religionsunterricht durch alle Klassen erhalten werde. Ich mußte aus dem neuen Testamente übersetzen und weil dort von der Rechtfertigung durch Christum die Rede war, so mußte ich diese entwickeln. Ferner wurde ich in der Moral und Kirchengeschichte examinirt, wo ich zufällig alles wußte was gefragt wurde, zuletzt entwickelte ich noch da ich den zweiten Psalm aus dem Hebräischen übersetzen mußte (den ich früher einmal hebräisch auswendig gekonnt hatte) eine große Kenntniß des Hebräischen und der Examinator war so zufrieden daß er mir zum Schlusse die Hand drückte. Nachmittag hatte ich nun noch 3 Stunden in der Philologie Geschichte und Mathematik. Ich kam um 2 Uhr zuerst zu dem Philologen Prof. BERNHARDI (denn alle 3, welche mich Nachmittag examinirten hatten sichs bequem gemacht und ließen mich auf ihre Stuben kommen). Dieser kam zuerst mit seinen echtphilologischen Fragen hervor, ich gestand ihm aber gleich immer wo ich nichts wußte, und so legte er mir denn ein griechisches Buch vor was ich übersetzen sollte. Daß war nur grade meine stärkste Seite, und ich übersetzte

es ihm deutsch und lateinisch ganz gut. Er meinte wenn ich ein Wort nicht wisse so sollte ich ihn nur fragen, ich wußte sie aber alle außer einem, von dem er selbst sagte daß es ein sehr seltenes Wort sei. Kurz wir unterhielten uns recht gut, weil ihm wie es mir schien meine Offenherzigkeit gefiel und er sah daß ich mein Wissen grade so gab wie es war. Er meinte er werde mir den Unterricht in den unteren Klassen geben, was ich auch bloß gewünscht hatte. In der Geschichte wurde ich sowohl in der ältsten als neusten und mittlern examinirt, in den beiden ersten ging es recht gut, aber in der mittlern wußte ich leider nicht viel. Beim Professor Scherk sodann, zu dem ich ging, setzten wir uns etwas aufs Sopha und unterhielten uns, und er meinte er brauche mich eigentlich gar nicht zu examiniren, wenn er nicht darüber Bericht erstatten müßte. Er hatte eben einen Brief von einem seiner ehemaligen Schüler erhalten, welcher ihn bei einer Aufgabe um Rath frug, er gab sie mir, und ich löste denn die Schwierigkeit sogleich; sodann frug er mich noch in der Mechanik und Physik und ich blieb ihm keine einzige Antwort schuldig. Ich dachte Ende gut alles gut! . . . Nun leben Sie indessen recht wohl und freuen Sie Sich immer darauf Ihre beiden Söhne recht bald wiederzusehen.

Eduard Kummer.

Breslau, d. 30. Jan. 1834.

Meine herzlich geliebte Mutter!

Sie haben mir zu meinem Geburtstage durch das niedliche Feuerzeugtäschchen eine sehr große Freude gemacht und ich sage Ihnen meinen herzlichsten Dank dafür. Um uns zu Weihnachten und zu unseren Geburtstagen beschenken zu können dürfen Sie sich nicht mehr wünschen in der Lotterie zu gewinnen, denn über eine Arbeit von Ihrer Hand freuen wir uns doch mehr, als über pomphafte Geschenke. Beiläufig gesagt: ich habe nicht in die Lotterie gesetzt, weil ich denke der Sperling in der Hand ist besser als die Taube auf dem Dache oder weil die 9 Thaler die ich mir dadurch gewiß erspare besser sind als alle Gewinne zusammen wenn ich keinen derselben bekomme. Ich soll nun einmal ein armer Schlucker bleiben, denn wenn ich es auch einmal dahin bringe Professor zu werden so habe ich dann auch wahrscheinlich keinen großen Gehalt. Mein Osterprogramm ist nun fertig es ist zwar klein und füllt nur anderthalb Bogen aber es ist

inhaltsschwer. Ich habe auch schon einen Brief an einen großen Mathematiker in Königsberg fertig, welchem ich es überschicken werde. Dieß kann mir nun freilich sonst nichts nutzen, aber es ist dafür um so besser, denn man muß ja nicht alles des Nutzens wegen thun. Ich überschicke es ihm bloß darum weil er gerade die größten Entdeckungen in dem Fache gemacht hat worüber mein Programm handelt und er wird sich darüber wundern und freuen zugleich, daß ein Musketier dieselben Gegenstände behandelt als er. . . .

Ihr Sie innig liebender Sohn

Eduard.

Kummers Briefe an Leopold Kronecker.

Mein herzlich geliebter Freund und Schüler!

Wenn Sie Ihren alten Lehrer D. K. wieder sehen wollen, woran ich nicht zweifle, so kommen Sie Sonntag früh zur Ankunft der Personenpost (wie ich glaube um 5 Uhr) in das Berliner Postgebäude, dort werden Sie ihn vom Wagen absteigen sehen, und zwar ist das mein voller Ernst. Alles übrige mündlich.

Ihr Sie herzlich liebender

E. Kummer.

Liegnitz, d. 16. Januar 1842.

Herzlich geliebter Freund!

Ich komme mit der Beantwortung Ihres mir sehr lieben Briefes über Schellings Vorlesungen und über andere wichtige Gegenstände etwas spät, ebenso auch mit der Meldung meines neusten Avancements zum ordentlichen Professor an der Universität Breslau, ich verschwende aber die Zeit nicht erst mit Entschuldigungen. — Seit ich bei meiner letzten Anwesenheit in Berlin merkte, es könne mit Breslau Ernst werden, so setzte ich mich zu Hause hin und arbeitete sehr fleißig um so etwas wie eine Dissertation zur Habilitirung zu arbeiten, und ich fing bei etwas mir ganz neuem an, nämlich bei den Cubischen Resten der Primzahlen $6n + 1$. Ich habe seitdem einige bemerkenswerthe Dinge

darin gefunden, bin aber mit den früheren oder vielmehr bisherigen Leistungen Anderer in diesem Fache ganz unbekannt, und um damit nicht unbekannt zu bleiben, so richte ich an Sie die Bitte einmal Dirichlet hierüber zu befragen, sich recht genau darüber zu instruiren, und mir es nachher brieflich mitzutheilen. Wenn ich mich selbst an Dirichlet wendete so würde ich diesen zu einem ihm unangenehmen Geschäfte zum Briefschreiben nothzüchtigen und das will ich ihm nicht anthun; Sie besorgen es mir ja gern und gut. Wenn Sie sich deshalb an Dirichlet wenden, so grüßen Sie ihn bestens von mir, versichern ihn meiner Hochachtung u. s. w. und sagen Sie ihm ich werde nächstens an ihn schreiben, nächstens heißt so viel als etwa vor Ostern. Ich könnte Ihnen nun etwas von meiner Arbeit mittheilen und will es auch thun immer im Vergleich mit quadratischen Resten. So wie dort Zahlen a und b (Reste und Nichtreste) zu unterscheiden sind, so gibt es hier drei Zahlenreihen α, β und γ, so wie dort $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$, wenn p die Primzahl ist, so ist hier nach einer ähnlichen Bezeichnung, die ich anwende $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{\beta}{p}\right) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\left(\frac{\gamma}{p}\right) = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, so wie dort die Reihen $\sum \cos\frac{2a\pi}{p}$, $\sum \cos\frac{2b\pi}{p}$, eine wichtige Rolle spielen, ebenso hier die Reihen $\sum \cos\frac{2\alpha\pi}{p}, \sum \cos\frac{2\beta\pi}{p}$, $\sum \cos\frac{2\gamma\pi}{p}$, von denen Gauss im letzten Abschnitte der disq. arith. gezeigt hat, daß sie die drei reellen Wurzeln einer cubischen Gleichung sind. Aus jeder Reihe $A + A_1 \cos v + A_2 \cos 2v + A_3 \cos 3v + \cdots$ kann man die Summe der Glieder ΣA_a deren Indices quadratische Reste sind und ΣA_b apart finden, ebenso hier die drei Summen ΣA_α, ΣA_β und ΣA_γ. So wie $4 \cdot \frac{1-x^p}{1-x}$ in die Form $X^2 \pm p Y^2$ gesetzt werden kann, ebenso kann $27 \cdot \frac{1-x^p}{1-x}$ in eine ternäre cubische Form gesetzt werden von der Art wie Dirichlet dieselben nimmt, $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ und $\Sigma\gamma$, auch $\Sigma\alpha''$, $\Sigma\beta''$, $\Sigma\gamma''$ fehlen hier ebenfalls nicht und geben sehr interessante Resultate. Kurz es ist in der Theorie der quadratischen Reste nichts was nicht sein Analogon in der Theorie der cubischen Reste hätte. In specie hätte ich auch gern Auskunft darüber, ob der Satz bekannt ist: wenn $4p = t^2 + 27u^2$, daß t und u beides cubische Reste der Primzahl p sind. Eine zweite Schwierigkeit, wenn Sie mir die Quellen der Geschichte der cubischen Reste werden mitgetheilt haben, wird die sein, wie ich mir dieselben werde verschaffen können, aber ich rechne

hierin auch schon im Voraus auf Ihren Beistand. Die Einführung der Zeichen und Begriffe $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$, wenn $n^{\frac{p-1}{3}} = 1$ und $\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ wenn $n^{\frac{p-1}{3}}$ nicht $= 1$ nehme ich, bis ich darüber werde enttäuscht worden sein, für eine meiner Erfindungen und zwar für eine recht fruchtbare.

Somit beschließe ich den mathematischen Theil meiner Epistel und komme nun zu dem philosophischen, d. i. zu SCHELLING. Nach Allem, was Sie mir schreiben liegt der wesentlichste Unterschied SCHELLINGscher und HEGELscher Philosophie darin, daß SCHELLING das Sein und Denken als ursprünglich verschieden setzt und sie sich erst einander nähern läßt oder vielmehr nur das Denken dem Sein zu nähern sucht, während sie bei HEGEL ursprünglich eine ungetrennte Einheit ausmachen. Mir scheint die Trennung des Denkens und Seins der früheren niederen Bildungsstufe der Philosophie anzugehören und so auch SCHELLING insofern er an dieser Trennung fest hält. Sonst aber ist SCHELLING gewiß die interessanteste und größte philosophische Person gegenwärtiger Zeit und in seinem Colleg zu sitzen und zuzuhören einer der größten philosophischen Genüsse die man in gegenwärtiger Zeit haben kann. Denn wenn auch ein anderer Philosoph besser vorträgt oder auch ebenso wahre und wahrere Dinge sagen kann als er, so ist er doch der einzige welthistorische Philosoph der noch lebt und insofern ist ein Wort von ihm gesprochen gewichtiger als von irgend einem Andern. Wenn ich ehe ich SCHELLING gehört hatte der Meinung war es reiche hin für die Ehre Preußens und für die Belebung philosophischen Interesses, wenn er auf dem Oranienburger Kirchhofe begraben würde, so bin ich jetzt anderer Meinung, denn ein Colleg wie das seinige setzt mehr als irgend eines eine Masse geistiger Kräfte in Thätigkeit und Bewegung und ist schon insofern von unschätzbarem Gewinne. . .

Leben Sie recht wohl und behalten sie immer lieb Ihren Sie von ganzem Herzen liebenden

E. KUMMER.

Liegnitz, d. 9. Febr. 1842.

Herzlich geliebter Freund!

Meinen besten Dank für ihre gütige prompte Besorgung, die ich Ihnen in meinem vorigen Briefe aufgetragen hatte. JACOBIS Aufsatz

commentatio de resid. cub. im 2. Bande von Crelles Journal habe ich seitdem gelesen, bei weitem begieriger aber wäre ich auf JACOBIS Abhandlung in der Berliner Academie wo er die complexen Zahlen anwendet, wenn Sie mir diese doch irgendwie verschaffen könnten. Auf LEBESQUE bin ich nicht so piquirt, denn meine Weise ist den Franzosen noch fremd, da sie mehr der Weise von DIRICHLET wie derselbe die den 2. Grad betreffenden Reste und Geschichten behandelt sich anschließt. Was ich Ihnen in meinem vorigen Briefe geschrieben habe, konnte ich selbst gar nicht alles für neu halten, da vieles sich jedem, der die cubischen Reste behandelt, nothwendig darbieten muß; es war vielmehr nur meine Absicht Ihnen eine Uebersicht über die zu behandelnden Gegenstände zu geben, und nur einiges namentlich bezeichnete hielt ich für neu. Heute nun will ich fortfahren Ihnen was ich seitdem gearbeitet habe mitzutheilen und da Sie so wie auch DIRICHLET auf $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ begierig scheinen so will ich zuerst mittheilen was ich über diese weiß: Dieß gründet sich auf die Lösung folgender Aufgabe: Wenn $f(v) = A_1 \cos v + A_2 \cos 2v + A_3 \cos 3v + \cdots$ etc. gegeben ist, die Summe folgender Reihe zu finden:

$$\left(\frac{1}{p}\right)_3 A_1 + \left(\frac{2}{p}\right)_3 A_2 + \left(\frac{3}{p}\right)_3 A_3 + \cdots \text{ wo } \left(\frac{\varkappa}{p}\right)_3 = 1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

jenachdem $\varkappa$ der Reihe der α, β, oder γ resp. angehört. Die Lösung ist sehr leicht es ist nämlich

$$3\sum_{1}^{p-1}{}_{\varkappa}\left(\frac{\varkappa}{p}\right)_3^2 f\left(\frac{2\varkappa\pi}{p}\right) = (z_1 + h^2 z_2 + h z_3)\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\left(\frac{m}{p}\right)_3 A_m$$

wo

$$h = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \text{oder } h^3 = 1$$

und

$$z_1 = \sum_{0}^{p-1}{}_{\varkappa} \cos\frac{2\alpha\varkappa^3\pi}{p}, \quad z_2 = \sum_{0}^{p-1}{}_{\varkappa} \cos\frac{2\beta\varkappa^3\pi}{p}, \quad z_3 = \sum_{0}^{p-1}{}_{\varkappa} \cos\frac{2\gamma\varkappa^3\pi}{p}.$$

Dieser Satz ist die Quelle folgender Resultate, für welche ich noch einige Bezeichnungen mittheilen muß: Wenn man unter $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ die Summen aller α, β, γ zwischen 0 und p versteht so sind diese Summen ohne Interesse, alle einander gleich, nämlich $=\frac{p(p-1)}{6}$, es sind also darunter nur die Summen zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ zu verstehen; die Summen der Quadrate aber $\Sigma\alpha^2$, $\Sigma\beta^2$, $\Sigma\gamma^2$ sind verschieden, und

können in den Grenzen 0 und p genommen werden. Unter dieser Voraussetzung lassen sich $\Sigma\alpha^2$, $\Sigma\beta^2$, $\Sigma\gamma^2$ durch $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ ausdrücken, und zwar sind die Ausdrücke ganz verschieden jenachdem die Zahl 2 der Reihe der α, β oder γ angehört. Es verhält sich ähnlich wie bei den quadratischen Resten der Zahlen $4n+1$. Die Summation der Reihe $\sum\limits_0 \left(\frac{2m+1}{p}\right) \frac{1}{(2m+1)^2}$ nach dem obigen Satze lehrt nun wie die dreimal drei Größen z_1, z_2, z_3; $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$, und $\sum \frac{1}{\alpha_1^2}$, $\sum \frac{1}{\beta_1^2}$, $\sum \frac{1}{\gamma_1^2}$ in welchen letzteren α_1 alle ungeraden cubischen Reste von 1 bis ins unendliche β_1 alle etc etc. bezeichnet, so zusammen hängen, daß aus z_1, z_2, z_3 und $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$, die übrigen drei nämlich $\sum \frac{1}{\alpha_1^2}$, $\sum \frac{1}{\beta_1^2}$, $\sum \frac{1}{\gamma_1^2}$ bestimmt werden können und ebenso $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$, $\Sigma\gamma$ aus den übrigen sechs, und auch z_1, z_2, z_3 aus den übrigen sechs. Dieß ist ein Beispiel von der Anwendung der obigen Methode und zwar eins der interessantesten. Mit Hilfe der hierdurch erlangten Formeln kann man auch g e w i s s e r m a ß e n die Aufgabe lösen: welche von den drei Wurzeln der cubischen Gleichung dem z_1, welche dem z_2, und welche dem z_3 zugehört oder gleich ist, ich sage gewissermaßen, weil man dazu die berechneten Werthe der $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ und $\Sigma\gamma$ braucht, welches nicht gut ist, da man lieber aus der Zahl p oder aus $4p = t^2 + 27u^2$ schon entscheiden möchte welche Wurzel jedem der z_1, z_2 und z_3 angehört. Ich habe die Werthe der $\Sigma\alpha$, $\Sigma\beta$ und $\Sigma\gamma$ für die Primzahlen von der Form $6n+1$ unter 200 alle berechnet, und die Werthe der z_1, z_2, z_3 für alle diese bestimmt, um durch Induction zu finden welches Gesetz obwaltet, habe aber aus den Factoren von $p-1$ oder aus den Zahlen t und u keines finden können. Die drei Wurzeln der cubischen Gleichung liegen eine in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$, die andere in den Grenzen $-\sqrt{p}$ und $+\sqrt{p}$, die dritte in den Grenzen $+\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$, und es liegt $z_1 = \sum\limits_{\varkappa}^{p-1} \cos\frac{2\varkappa^3\pi}{p}$ in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ bis $-\sqrt{p}$ für $p = 97$, 139, 151, 199, aber z_1 in den Grenzen $-\sqrt{p}$ bis $+\sqrt{p}$ für $p = 13$, 19, 37, 61, 109, 157, 193 und z_1 in den Grenzen $+\sqrt{p}$ bis $+2\sqrt{p}$ für $p = 31$, 43, 67, 73, 79, 103, 127, 163, 181. Ich schreibe Ihnen dieß, damit Sie sich an einer Induction versuchen können, wenn Sie wollen. Durch die lineäre Form des p wie bei $\sum \cos\frac{2\varkappa^2\pi}{p}$, oder bei den quadratischen Resten, ist hier nichts

gethan, auch gelten die Resultate hier nicht so wie dort auch für zusammengesetzte Zahlen, sondern stellen sich da ganz anders; wenn nämlich P eine zusammengesetzte Zahl bedeutet, so ist $\sum_0^{P-1}\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{P}$ wenn $P = 2^r\cdot 3^s\cdot a^\alpha\cdot b^\beta\cdot c^\gamma\cdots$ in folgenden Fällen gleich Null: 1) sobald einer der Primfactoren a, b, c die Form $6n-1$ hat, 2) wenn der Exponent der 2 nämlich r von der Form $3n-1$ ist, und 3) wenn s von der Form $3n+1$ ist. Wenn keiner der Exponenten r, s, α, β, $\gamma\ldots$ die Form $3n+1$ hat, so ist $\sum_0^{P-1}\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{P}$ = einer ganzen Zahl, welche nur die Factoren 2, 3, a, b, c, . . . enthält, wenn aber irgend welche der Factoren a, b, c einen Exponenten von der Form $3n+1$ haben, z. B. wenn $\alpha = 3n+1$ und $\gamma = 3m+1$, so ist

$$\sum_0^{P-1}\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{P} = M\sum_0^{a-1}\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{a}\cdot\sum_0^{c-1}\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{c},$$

wo M eine ganze Zahl ist. Von den drei unendlichen Reihen

$$\sum\frac{1}{\alpha_1^2},\ \sum\frac{1}{\beta_1^2},\ \sum\frac{1}{\gamma_1^2}$$

ist zu bemerken, daß sie ebenfalls die drei Wurzeln einer cubischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sind und daß sie folgenden endlichen Reihen gleich sind

$$c\cdot\sum_0^{p-1}\frac{1}{\varkappa\left(\cos\frac{2\alpha\varkappa^3\pi}{p}\right)^2},\quad c\cdot\sum_0^{p-1}\frac{1}{\varkappa\left(\cos\frac{2\beta\varkappa^3\pi}{p}\right)^2},\quad c\cdot\sum_0^{p-1}\frac{1}{\varkappa\left(\cos\frac{2\gamma\varkappa^3\pi}{p}\right)^2}.$$

Einem Reciprocitätsgesetze für cubische Reste habe ich ebenfalls gleich anfangs nachgestrebt, als ich die cubischen Reste zum Gegenstande meiner Untersuchungen machte, jetzt da ich weiß daß JACOBI dieses in der einfachsten Gestalt für complexe Zahlen aufgestellt hat, habe ich vorläufig mit complexen Zahlen von der Form $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ mich befaßt, denn diese Art gehört den cubischen Resten an oder die Art $a + bh + ch^2$, wo $h^3 = 1$ ist. Dieß entfernte mich aber von meinen Reihen $z_1 = \sum\cos\frac{2\varkappa^3\pi}{p}$ etc. die ich durch viele darauf verwandte Mühe lieb gewonnen habe. Erst in der ganz neuen Zeit habe ich die complexen Zahlen $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ wieder mit mehr Liebe angesehen, seit sie mir

4*

ein Aequivalent für meine verloren gegangenen z_1, z_2, z_3 zu bieten versprechen, nämlich in den Reihen die aus elliptischen Functionen auf ähnliche Weise gebildet sind, wie jene aus Kreisfunctionen. Die Elliptischen Functionen haben nämlich die reale und imaginäre Periode und so wie $\cos \frac{2z\pi}{p}$ dasselbe bleibt wenn man für z eine andere Zahl z' nimmt, so daß $z = z' \bmod p$, so ist dieß ähnlich für complexe Zahlen bei $\cos \operatorname{am} \frac{Km + K'ni}{p}$. So wie aber für complexe Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ die Lemniscate oder das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ aus der Theorie der Elliptischen Functionen zugeordnet ist, so habe ich gefunden daß für die complexen Zahlen von der Form $\frac{a + b\sqrt{-3}}{2}$ das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$ dieselbe Rolle spielt, dieß ist nämlich dasjenige elliptische Integral der ersten Art dessen Modul $= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sin 15^0$. Es sollte mich sehr wundern, wenn dieß JACOBI entgangen sein sollte, überhaupt wenn so einer einen Gegenstand schon behandelt hat, und unser einer macht sich daran, so bleibt einem wenig mehr übrig als eine Ausführung derjenigen Ideen, welche von ihm schon ausgesprochen, oder wenigstens schon gehegt worden sind. Ich studiere jetzt, in Rücksicht auf diese complexen Zahlen, von neuem elliptische Functionen, namentlich die erste Abhandlung von ABEL in Crelles Journal und ich glaube es wird sich etwas machen lassen, gemacht aber ist bis jetzt noch nichts, nämlich von mir in diesem Fache. Ich habe Sie nun wieder einmal ganz von dem Stande meiner Angelegenheiten au fait gesetzt, und wenn DIRICHLET dafür sich auch interessiert, so theilen sie ihm davon mit was Sie wollen, ich wollte nur es wäre etwas besseres, was seiner Aufmerksamkeit mehr werth wäre. Wenn Sie einmal zufällig in seinem Ciguarren-Kasten seinen rothen Adler sehen (denn dort soll sein gewöhnlicher Aufenthaltsort sein, wie mir ARNOLD geschrieben hat) so gratuliren Sie ihm in meinem Namen zu dieser Ritterschaft. Wenn DIRICHLET Ihnen im nächsten Sommer complexe Zahlen-Theorie liest, so nehmen Sie dies dankbar an, ich selbst würde gern mit zuhören, wenn ich könnte, denn Sie können glauben es ist etwas mühsam sich dergleichen alles allein zu machen, wenn man wie ich nur etwa die Haupt-Ideen von anderen erfahren hat. . . .

Leben Sie recht wohl und schreiben Sie mir recht bald wieder. Daß Sie DIRICHLET und meine Vettern in Berlin von mir grüßen, versteht sich von selbst. Ihr Sie herzlich liebender

E. KUMMER.

Breslau, den 10. Apr. 1844.

Herzlich geliebter Freund!

Weil ich Sie jetzt nicht hier habe um über unsere complexen Zahlen mündlich conferiren zu können, so theile ich Ihnen einiges schriftlich mit, welches wie ich glaube für Sie um so mehr Interesse haben wird weil es speciell das betrifft worüber Sie hier zuletzt arbeiteten. Ich gehe aber erst von einer anderen Sache aus, nämlich von dem Satze:

Wenn $f(\alpha)$ die Norm p hat (p Primzahl $\lambda n + 1$), so ist jede complexe Zahl einer reellen congruent für den Modul $f(\alpha)$.

Hierbei ist nur zu zeigen, daß $\alpha \equiv \xi \mod f(\alpha)$, wo ξ reell. Dieß scheint sich von selbst zu verstehen, weil $\xi - \alpha$ wenn

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{\lambda - 1} \equiv 0 \mod p$$

stets einen Factor mit p gemein hat, wie in dem Beweise, daß jede Primzahl p sich in $\lambda - 1$ complexe Factoren zerlegen läßt gezeigt wird. Es versteht sich aber bei näherer Betrachtung nicht von selbst, sondern bedarf folgenden Beweises. Ich fange den Beweis mit einem Hülfssatze an, der wenn Sie ihn nicht schon selbst allgemein bewiesen haben Ihnen erwünscht sein wird, nämlich wenn

$$f\alpha^2 \cdot f\alpha^3 \cdot f\alpha^4 \cdots f\alpha^{\lambda - 1} = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda - 1}\alpha^{\lambda - 1}$$

so ist allgemein für jeden Werth des n

$$(A_n - A_{n+1})^2 \equiv (A_{n-1} - A_n)(A_{n+1} - A_{n+2}) \mod p.$$

Sei

$$A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1} = f\alpha^2 f\alpha^3 f\alpha^4 \cdots f\alpha^{\lambda-1} = \Psi(\alpha)$$

so folgt nach sehr bekannten Methoden

$$\lambda A_n - (A + A_1 + A_2 + \cdots + A_{\lambda-1})$$
$$= \alpha^n \Psi\alpha + \alpha^{2n} \Psi\alpha^2 + \alpha^{3n} \Psi\alpha^3 + \cdots + \alpha^{(\lambda-1)n} \Psi\alpha^{\lambda-1}$$

also wenn $n + 1$ statt n gesetzt und subtrahirt wird

$$\lambda(A_n - A_{n+1}) = \alpha^n(1 - \alpha)\Psi\alpha$$
$$+ \alpha^{2n}(1 - \alpha^2)\Psi\alpha^2 + \alpha^{3n}(1 - \alpha^3)\Psi\alpha^3 + \cdots + \alpha^{(\lambda-1)n}(1 - \alpha^{\lambda-1})\Psi\alpha^{\lambda-1}.$$

Setzt man hierin wieder erstens $n + 1$ statt n, zweitens $n - 1$ statt n und bildet den Ausdruck

$$\lambda^2(A_n - A_{n+1})^2 - \lambda^2(A_{n-1} - A_n)(A_{n+1} - A_{n+2}),$$

so übersieht man in der That sehr leicht, daß diejenigen Glieder welche

das Quadrat eines Ψ enthalten, nämlich $(\Psi\alpha)^2$, $(\Psi\alpha^2)^2$, $(\Psi\alpha^3)^2$ etc. alle verschwinden, und daß nur diejenigen bleiben, welche Produkte zweier verschiedenen Ψ enthalten. Jedes Produkt zweier verschiedener Ψ enthält aber die Factoren $f\alpha f\alpha^2 f\alpha^3 \cdots f\alpha^{\lambda-1}$ also den Factor p. Dieser Ausdruck ist daher durch p theilbar, also die obige Congruenz erwiesen.

Von hier manövrire ich weiter zu meinem Ziele hin. Ich setze:

$$\frac{A_k - A_{k+1}}{A_{k+1} - A_{k+2}} \equiv \xi \mod p,$$

so ist nach der obigen Congruenz ξ von k unabhängig, man hat also die Congruenzen

$$A\xi - A_{\lambda-1} \equiv A_1\xi - A \equiv A_2\xi - A_1 \equiv A_3\xi - A_2 \equiv \cdots$$
$$\equiv A_{\lambda-1}\xi - A_{\lambda-2} \mod p,$$

welche ich um des Folgenden willen auch so darstelle

$$\text{(A)} \quad \begin{gathered} A_{\lambda-1} - A \equiv (A - A_1)\xi, \quad A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1} \equiv (A - A_1)\xi^2, \\ A_{\lambda-3} - A_{\lambda-2} \equiv (A - A_1)\xi^3, \quad \ldots \; A_1 - A_2 \equiv (A - A_1)\xi^{\lambda-1}; \end{gathered}$$

Ich schreibe diese Congruenzen auch als Gleichungen

$$\begin{aligned} A\xi - A_{\lambda-1} &= mp + \mu \\ A_1\xi - A \quad &= m_1 p + \mu \\ A_2\xi - A_1 \quad &= m_2 p + \mu \\ &\;\;\vdots \\ A_{\lambda-1}\xi - A_{\lambda-2} &= m_{\lambda-1}p + \mu. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplicire ich resp. mit $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{\lambda-1}$ und addire, wodurch ich erhalte:

$$(\xi - \alpha)(A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$
$$= p(m + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + \cdots + m_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

und wenn für p sein Werth

$$p = f(\alpha)(A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

gesetzt wird und aufgehoben wird so hat man endlich

$$\xi - \alpha = f(\alpha)(m + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + \cdots + m_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

oder

$$\xi - \alpha \equiv 0 \mod f(\alpha).$$

Daß die Zahl ξ eine Wurzel der Congruenz $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \mod p$ ist versteht sich von selbst.

Ich rücke jetzt Ihrem Satze daß zwei verschiedene Zerlegungen des p sich nur durch Einheiten unterscheiden, wieder einen Schritt

näher, aber noch zuvor mache ich eine andere wichtige Angelegenheit ab.

Sei

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1};$$

$$f\alpha^2 f\alpha^3 f\alpha^4 \cdots f\alpha^{\lambda-1} = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

so ist

$$(a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})(A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}) = p,$$

entwickelt man dieses Product und zieht das Glied, welches α enthält, von dem ab, welches kein α enthält, so erhält man offenbar:

$$(A - A_1)a + (A_{\lambda-1} - A)a_1 + (A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1})a_2 + \cdots + (A_1 - A_2)a_{\lambda-1} = p;$$

macht man nun von den bei (A) angegebenen Congruenzen Gebrauch so erhält man

$$(A - A_1)(a + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1}) \equiv 0 \mod p,$$

also auch

$$a + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1} \equiv 0 \mod p$$

oder wenn $f(\alpha)$ ein Divisor von $\xi - \alpha$, so ist $f(\xi)$ durch p theilbar.

Jetzt endlich betrachte ich zwei verschiedene Zerlegungen der Primzahl p nämlich

$$p = f\alpha f\alpha^2 f\alpha^3 \cdots f\alpha^{\lambda-1} \quad \text{und} \quad p = \varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)\varphi(\alpha^3)\cdots\varphi(\alpha^{\lambda-1}).$$

Nun ist oben erwiesen daß jeder Factor f ein Divisor von $\xi - \alpha$ oder $\xi^2 - \alpha$ oder $\xi^3 - \alpha$ ... $\xi^{\lambda-1} - \alpha$ sein muß, wo $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{\lambda-1} \equiv 0$, mod p, ebenso muß jeder Factor φ ein Divisor einer dieser Größen sein, und zwar so, daß für einen bestimmten Werth des ξ, die Zahl $\xi - \alpha$ sowohl einen Divisor unter den f als auch einen Divisor unter den φ haben muß. Als diese Divisoren welche beide in $\xi - \alpha$ theilbar sind nehme ich $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$, (welches im Grunde dasselbe ist als wenn ich $f(\alpha^\mu)$ und $\varphi(\alpha^\nu)$ genommen hätte). Ich bilde nun das Product

$$\varphi(\alpha) \cdot f\alpha^2 f\alpha^3 f\alpha^4 \ldots f\alpha^{\lambda-1}$$
$$= (b + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + b_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})(A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})$$

dessen Entwicklung sei

$$C + C_1\alpha + C_2\alpha^2 + \cdots + C_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}.$$

Durch Ausführung der Multiplication erhält man hiernach folgende Werthe der C, C_1, C_2, ... $C_{\lambda-1}$:

$$
\begin{aligned}
A b + A_{\lambda-1} b_1 + A_{\lambda-2} b_2 + \cdots + A_1 b_{\lambda-1} &= C \\
A_1 b + A b_1 + A_{\lambda-1} b_2 + \cdots + A_2 b_{\lambda-1} &= C_1 \\
A_2 b + A_1 b_1 + A b_2 + \cdots + A_3 b_{\lambda-1} &= C_2 \\
&\vdots \\
A_{\lambda-1} b + A_{\lambda-2} b_1 + A_{\lambda-3} b_2 + \cdots + A b_{\lambda-1} &= C_{\lambda-1}
\end{aligned}
$$

und hieraus durch Subtraction:

$$
\begin{aligned}
(A - A_1) b + (A_{\lambda-1} - A) b_1 + (A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1}) b_2 + \cdots + (A_1 - A_2) b_{\lambda-1} &= C - C_1 \\
(A_1 - A_2) b + (A - A_1) b_1 + (A_{\lambda-1} - A) b_2 + \cdots + (A_2 - A_3) b_{\lambda-1} &= C_1 - C_2 \\
(A_2 - A_3) b + (A_1 - A_2) b_1 + (A - A_1) b_2 + \cdots + (A_3 - A_4) b_{\lambda-1} &= C_2 - C_3 \\
&\vdots \\
(A_{\lambda-2} - A_{\lambda-1}) b + (A_{\lambda-3} - A_{\lambda-2}) b_1 + (A_{\lambda-4} - A_{\lambda-3}) b_2 + \cdots + (A_{\lambda-1} - A) b_{\lambda-1} &= C_{\lambda-2} - C_{\lambda-1}.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung der Congruenzen (A) erhält man hieraus

$$
\begin{aligned}
(A - A_1)(b + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \cdots + b_{\lambda-1} \xi^{\lambda-1}) &\equiv C - C_1 \\
\xi^{\lambda-1} (A - A_1)(b + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \cdots + b_{\lambda-1} \xi^{\lambda-1}) &\equiv C_1 - C_2 \\
\xi^{\lambda-2} (A - A_1)(b + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \cdots + b_{\lambda-1} \xi^{\lambda-1}) &\equiv C_2 - C_3 \\
&\vdots \\
\xi^{2} (A - A_1)(b + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \cdots + b_{\lambda-1} \xi^{\lambda-1}) &\equiv C_{\lambda-2} - C_{\lambda-1}.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung $\varphi(\alpha)$ ein Divisor von $\xi - \alpha$, also $\varphi(\xi) \equiv 0$, d. i.

$$b + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \cdots + b_{\lambda-1} \xi^{\lambda-1} \equiv 0 \mod p,$$

also

$$C \equiv C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv \cdots \equiv C_{\lambda-1} \mod p$$

Das Product $\varphi(\alpha) f\alpha^2 f\alpha^3 f\alpha^4 \ldots f\alpha^{\lambda-1}$ ist also ein vielfaches von p. Darum darf man setzen

$$\varphi(\alpha) f\alpha^2 f\alpha^3 f\alpha^4 \cdots f\alpha^{\lambda-1} = p \cdot \Psi(\alpha)$$

und wenn mit $f(\alpha)$ multiplicirt und p weggehoben wird hat man

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) \cdot \Psi(\alpha).$$

Bildet man die Norm und hebt alsdann auf beiden Seiten p, so hat man

$$1 = \Psi\alpha \, \Psi\alpha^2 \, \Psi\alpha^3 \cdots \Psi\alpha^{\lambda-1}$$

also $\Psi(\alpha)$ ist eine Einheit und es unterscheiden sich in der That die Factoren der einen Zerlegung des p von denen einer anderen Zerlegung nur dadurch, daß Einheiten als Factoren hinzutreten können.

Wenn ich nun weder bescheiden noch unbescheiden, sondern so wie es mir vorkommt selbst mein Urtheil über diese Methoden sagen soll, so finde ich sie trotz dem daß es nur Beweise von Dingen sind, die sich gewissermaßen von selbst verstehen, recht erbaulich und elegant und wenn sich noch manches andere ebenso leicht gestaltet, so gedenke ich diese Dinge im nächsten Semester meinen Zuhörern der Kreistheilung mitzutheilen.

Ich erwarte zur Belohnung für diesen langen Brief, daß Sie mir auch bald einmal von Liegnitz aus schreiben und wenn Sie durch Umstände wie sich allenfalls erwarten läßt gehindert sind hübsche Dinge über unsere complexen Zahlen zu suchen und zu finden so schreiben Sie mir wenigstens den unmathematischen Theil eines Briefes als da ist: Nachrichten über die socialen Zustände von Liegnitz, über bestimmte Personen, über Gymnasium und Academie, über Köhler und Müller, über Matthäus abgeschriebenes Programm, über Ihr und der Ihrigen Befinden, wobei ich zugleich bemerke, daß mein ganzer Hausstand in sehr erwünschtem Wohlsein ist. Einen Rückfall meines Schnupfens habe ich mir neulich mit einem guten warmen Punsche sehr gründlich curirt, so daß ich von Stund an wieder ganz wohl war, und ich rathe Ihnen in ähnlichen Fällen dasselbe Mittel anzuwenden. . . . Nun leben Sie recht wohl, grüßen Sie Ihre Eltern und alle anderen Bekannten und Freunde. Ihr Sie herzlich liebender

E. Kummer.

Breslau, d. 2. Oct. 44.

Geliebter Freund!

Da Sie wohl auf Ihren Reisen die Arbeiten über complexe Zahlen und resp. Einheiten etwas werden vernachläßigt haben und mir darum vielleicht hierüber noch nichts Neues zu schreiben haben, so fange ich selbst die Fortsetzung des neuen Briefwechsels an.

Seit unserer Trennung habe ich einiges erarbeitet, und zwar zunächst ein kleines Aufsätzchen für Crelle: „Ueber die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen" . . . Ist nämlich $p - 1 = e \cdot f$, und man theilt die Wurzeln der Gleichung $x^p - 1$ in e Perioden von je f Gliedern, welche ich mit $\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{e-1}$ bezeichne, so ist bekanntlich

$$(y-\eta)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\cdots(y-\eta_{e-1}) = y^e + c_1 y^{e-1} + c_2 y^{e-2} + \cdots + c_e = \Phi(y)$$

eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten. Die

Divisoren dieser Form $\Phi(y)$ untersuche ich zunächst und finde folgende Sätze: I. Jede Primzahl q, welche ein e^{ter} Potenzrest von p ist, ist Divisor von $\Phi(y)$ oder genauer die Congruenz $\Phi(y) \equiv 0$ Mod q hat wenn q ein e^{ter} Potenzrest von p und Primzahl ist immer e reale Wurzeln. II. p selbst ist auch Divisor von $\Phi(y)$. III. Wenn der Grad e der Form $\Phi(y)$ eine Primzahl ist, so hat $\Phi(y)$ keine anderen Divisoren als solche welche e^{te} Potenzreste von p sind und den Divisor p selbst. IV. Wenn e eine zusammengesetzte Zahl ist und die von Eins verschiedenen Divisoren $d, d', d'' \ldots$ hat, so kann $\Phi(y)$ außer den Primfactoren welche e^{te} Potenzreste des p sind und p selbst auch eine endliche Anzahl anderer Primfactoren enthalten, welche nur d^{te} oder d'^{te} etc. Potenzreste von p sind. Dieselben Sätze gelten auch von der Form

$$F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\cdots F(\eta_{e-1}) = \Phi$$

in welcher $F(\eta) = z\eta + z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \cdots + z_{e-1}\eta_{e-1}$, auch kommt nebenbei noch manches in dem Aufsätzchen vor.

Ferner habe ich in diesen Tagen einen wahrhaftigen strengen Beweis dafür gesucht und gefunden, daß jede Primzahl $p = 5m + 1$ in die Form $p = f(\alpha)f(\alpha^2)f(\alpha^3)f(\alpha^4)$ gesetzt werden kann. Nach § 9 meiner Dissertation hängt alles nur von dem Beweise des Satzes ab, daß wenn c, c_1, c_2, c_3, c_4 beliebige Größen sind die complexe Zahl $c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + c_4\alpha^4$, dadurch daß man diese Größen um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert immer dahin gebracht werden kann daß ihre Norm kleiner als Eins wird. Die hierzu hinreichenden ganzen Zahlen werden zunächst so gewählt, daß $c - z, c_1 - z_1, c_2 - z_2, c_3 - z_3, c_4 - z_4$ alle in einem Intervalle liegen welches kleiner als Eins ist oder daß der Unterschied der größten und kleinsten kleiner als Eins wird. Dieß kann auf 5 wesentlich verschiedene Arten geschehen, wie leicht einzusehen ist; von diesen 5 Arten wähle ich diejenige für welche das ganze Intervall das möglichst kleinste wird. Oder wenn man die um ganze Zahlen veränderten Coefficienten der Größe nach ordnet, und den Unterschied des größten vom nächst kleineren δ_1 nennt, den Unterschied dieses vom nächsten δ_2, etc., so ist das ganze Intervall $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, welches < 1 ist, (die δ sind alle positiv). Macht man den größten Coefficienten durch Subtraction von 1 zum kleinsten so bleibt das Intervall in welchem alle liegen kleiner als 1, etc. Setzt man nun $1 = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$, so kann man immer die Sache so einrichten, daß δ größer wird als alle $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$. Alles dieß war mir und auch Ihnen schon bekannt, nun kommt aber erst die Anwendung

Es ist

$$f(\alpha)f(\alpha^4) = -P(\alpha + \alpha^4) - Q(\alpha^2 + \alpha^3),$$

wenn

$$f(\alpha) = a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4$$

wo

$$P = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - aa_1 - a_1a_2 - a_2a_3 - a_3a_4 - a_4a$$
$$Q = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - aa_2 - a_1a_3 - a_2a_4 - a_3a - a_4a_1$$

oder

$$2P = (a - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a)^2$$
$$2Q = (a - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_3 - a)^2 + (a_4 - a_1)^2$$

ferner wird $Nf(\alpha) = -P^2 - Q^2 + 3PQ = PQ - (P - Q)^2$. Hieraus folgt zunächst, daß wenn P und Q beide kleiner als 1 sind, auch $Nf(\alpha)$ kleiner als 1 sein muß. Löst man ferner die Gleichung $-P^2 - Q^2 + 3PQ - Nf(\alpha) = 0$ auf, so wird $P = \frac{3Q \pm \sqrt{5Q^2 - 4Nf(\alpha)}}{2}$ woraus folgt, daß $Nf(\alpha) < \frac{5}{4}Q^2$ ist, also wenn $Q^2 < \frac{4}{5}$, so ist $Nf(\alpha) < 1$. ebenso wenn $P^2 < \frac{4}{5}$ ist $Nf(\alpha) < 1$.

Nun kann man ohne daß $Nf(\alpha)$ sich ändert den ersten Coefficienten zum größten machen und den zweiten zum nächstgrößten (nämlich durch Multiplikation mit einer passenden Potenz von α und durch Substitution von α^x statt α), es sei also a der größte a_1 der nächstgrößte Coefficient. Wegen der Größe der übrigen sind nun folgende 6 Fälle zu unterscheiden:

1. $a > a_1 > a_2 > a_3 > a_4$; $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_2 = \delta_2$, $a_2 - a_3 = \delta_3$, $a_3 - a_4 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2)^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2$.

2. $a > a_1 > a_2 > a_4 > a_3$, $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_2 = \delta_2$, $a_2 - a_4 = \delta_3$, $a_4 - a_3 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + \delta_2^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_4^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2)^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_3^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2$.

3. $a > a_1 > a_3 > a_2 > a_4$; $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_3 = \delta_2$, $a_3 - a_2 = \delta_3$, $a_2 - a_4 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2 + \delta_3^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + \delta_2^2 + \delta_4^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2$.

4. $a > a_1 > a_3 > a_4 > a_2$, $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_3 = \delta_2$, $a_3 - a_4 = \delta_3$, $a_4 - a_2 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_3^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_2^2 + \delta_4^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2$.

5. $a > a_1 > a_4 > a_2 > a_3$, $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_4 = \delta_2$, $a_4 - a_2 = \delta_3$, $a_2 - a_3 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2 + \delta_4^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_3^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_2^2$.

6. $a > a_1 > a_4 > a_3 > a_2$, $a - a_1 = \delta_1$, $a_1 - a_4 = \delta_2$, $a_4 - a_3 = \delta_3$, $a_3 - a_2 = \delta_4$;
$2P = \delta_1^2 + (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + \delta_4^2 + \delta_3^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2$;
$2Q = (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2 + (\delta_3 + \delta_4)^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + \delta_2^2$.

Für die Fälle 1, 2, 5, 6 beweist man sehr leicht daß $P < (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2$, weil $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ in allen Fällen positiv sind. Es ist aber $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, weil $1 = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$ und δ größer als $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$, also $P < (\frac{1}{2})^2$, also auch $P < \frac{1}{4}$, also $Nf(\alpha) < 1$.

Für die Fälle 3 und 4 reicht dieses nicht aus. Hier wird aber ebenso leicht bewiesen daß P und Q beide < 1 sind. Es ist nämlich für den Fall 3

$$P = \delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_3^2 + \delta_4^2 + 2\delta_2\delta_3 + 2\delta_3\delta_4 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_4,$$
$$\text{also } P < (\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4)^2$$

$$Q = \delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + 2\delta_1\delta_2 + 2\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_4 + \delta_3\delta_4,$$
$$\text{also } Q < (\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2,$$

für den Fall 4

$$P = \delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_3^2 + \delta_4^2 + 2\delta_2\delta_3 + 2\delta_3\delta_4 + \delta_2\delta_4 + \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3,$$
$$\text{also } P < (\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4)^2,$$

$$Q = \delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + 2\delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_4 + 2\delta_2\delta_3 + \delta_2\delta_4 + \delta_3\delta_4,$$
$$\text{also } Q < (\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 + \delta_4)^2,$$

es ist aber

$$\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 < \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \quad \text{also} < 1,$$

ebenso

$$\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4 < (\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) \quad \text{also} < 1,$$

da also in beiden Fällen P und Q kleiner als 1 sind so ist auch hier $Nf(\alpha) < 1$, w. z. b. w.

Ich habe schon etwas daran gearbeitet einen ähnlichen Beweis für $\lambda = 7$ zu machen, natürlich müßten dabei die 120 verschiedenen Fälle welche den obigen 6 analog sind, unter gemeinsame Gesichtspunkte gefaßt werden. Es wird mir zum Beweise glaube ich folgender einfache Satz behilflich sein. Es ist immer

$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 > \frac{(c + c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2}{n + 1},$$

was auch die $n + 1$ Größen c, c_1, etc. sein mögen.

Elegant ist der gefundene Beweis der Zerlegbarkeit der Primzahlen $p = 5m + 1$ in vier complexe Factoren nicht, indessen es ist doch ein strenger Beweis, und wenn es mir gelingen sollte auf diesem Wege weiterzugehen, so glaube ich wird schon der Beweis für den

Fall $\lambda = 7$ auf den für $\lambda = 5$ günstig zurückwirken, denn beim weitergehen wird man genöthigt das mehr Zufällige außer Acht zu lassen und das Wesentliche festzuhalten.

Ich erwarte nun nächstens einen recht ausführlichen Brief von Ihnen nicht allein über Ihre Arbeiten in unserem Gebiete, sondern auch über die Berliner Mathematiker überhaupt und über deren Bestrebungen u. s. w. auch über Ihren Besuch bei Scherk in Kiel, und wie Sie mein kleines Pathchen daselbst gefunden haben. Jacobi hat mir noch nicht geschrieben, hat mir aber durch Rosenhain versprechen lassen es bald nach seiner Ankunft in Berlin zu thun. Ich beneide Sie eigentlich darum, daß Sie jetzt in Berlin an der Quelle mathematischen Wissens sitzen, obgleich es mir andererseits auch gar nicht unlieb ist, daß ich fern von unmittelbarer Einwirkung der großen Mathematiker meine mathematische Selbstständigkeit besser habe bewahren können als mancher andere meines Gleichen. Nun leben Sie recht wohl mein herzlich geliebter Freund und schreiben Sie recht bald

Ihrem

Kummer.

Breslau den 16. Octbr. 1844.

Herzlich geliebter Freund!

Ich bin zu Ende der Ferien noch ziemlich fleißig gewesen und theile Ihnen als meinem Mitarbeiter im Reiche der complexen Zahlen einige Resultate meines Fleißes mit, welche Sie in dem beiliegenden Nachtrage zu meinem Programme finden. Nachdem Sie denselben durchgelesen haben bitte ich Sie ihn mit den gehörigen Empfehlungen von mir, an Jacobi zu übergeben, welchem dieser Nachtrag ebenso wie das Programm selbst gewidmet ist. Sie werden aus demselben ersehen, daß der Beweis der Zerfällbarkeit in 4 compl. Factoren der Primzahlen $5m + 1$ in der That noch schöner Vereinfachungen fähig war, und daß der Fall $\lambda = 7$ sich ganz nach denselben Principien abmachen läßt. Es ist in diesen beiden Fällen möglich gemacht worden die verschiedene Stellung der Coefficienten $a, a_1, a_2, \ldots a_{\lambda-1}$ in der complexen Zahl $a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ ganz außer Acht zu lassen, weil der Beweis sich auf eine Größe stützt welche eine symmetrische Function aller dieser Coefficienten, und auch der Differenzen je zweier derselben ist. Weiter auszudehnen geht diese Art des Be-

weises nicht, ich zweifle aber nicht daran, daß auch für $\lambda = 11, 13, 17, 19$ sich ähnliche einfache Beweise werden finden lassen.

Ferner habe ich alle Hauptresultate meines Programmes jetzt auch für diejenigen complexen Zahlen bewiesen, welche nicht aus den Wurzeln α der Gleichung $\alpha^{\lambda} = 1$, sondern aus den Perioden dieser Wurzeln gebildet sind. Es gestalten sich auch diese allgemeineren Resultate ebenso einfach und zum Theil noch eleganter als die für den speciellen Fall, wo die Perioden eingliedrig also die Wurzeln selbst sind.

Es ist nun aber nachdem ich Ihnen so fleißig Nachrichten gegeben habe wohl auch an der Zeit, daß Sie mir einmal schreiben. Thun Sie dieß ja recht bald, sonst drohe ich Ihnen mit meiner ganzen Ungnade. Grüßen Sie JOACHIMSTHAL, ARNOLD und alle welche mir lieb und werth sind, von Ihrem Sie herzlich liebenden

E. KUMMER.

Breslau den 26. Decbr. 1844.

Herzlich geliebter Freund!

Tausend Dank für Ihre beiden Briefe. Leider werde ich Ihnen dießmal wenig oder gar nichts mathematisches schreiben können, denn ich bin seit längerer Zeit sehr faul gewesen, und habe mich damit begnügt meine beiden Collegien ordentlich nicht nur zu lesen, sondern auch auszuarbeiten. Außerdem habe ich in der Philomathie, die Sie ja wohl dem Namen nach kennen (einem Vereine von Professoren die alle 14 Tage einmal zusammen kommen von einem einen Vortrag oder Abhandlung anhören und dann essen) einen Vortrag gehalten und zwar über das quantitativ Unendliche. Derselbe bestand aus zwei Theilen einem allgemeinen welchen ich aufgeschrieben hatte und ablas und einem speciellen welchen ich frei vortrug. Dieser Vortrag hat mich einige Zeit ganz beschäftigt und sehr interessirt, er hatte überall philosophische Form und es ist mir wirklich gelungen bei denen meiner Zuhörer welche überhaupt zu denken sich nicht scheuen nicht nur Interesse sondern auch Achtung vor dem mathematischen zu erwecken.

Ehe ich nun speciell auf den Inhalt Ihrer Mittheilungen eingehe will ich Ihnen noch einmal den guten Rath wiederholen, mit Ihren mathematischen Untersuchungen Epoche zu machen, nämlich recht zu verstehen ἐποχή von ἐπέχω anhalten abschließen. Halten Sie einen Augenblick an bei dem was Sie haben, formen Sie es

zu einem Ganzen, wenn auch nicht alles, doch das Hauptsächlichste, alsdann lassen Sie sich so rasch als möglich zum Doctor machen. Ich rathe Ihnen zu dieser Eile hauptsächlich darum weil ich sehe daß Sie sich in Berlin nicht nur übel befinden sondern auch langweilen, trotz aller Arbeit. Es fehlt Ihnen dort ein Hauptererforderniß des guten Gelingens: das Arbeiten mit Muße und mit Freude an allem was man zu Tage fördert, diese kann und muß man rein genießen und hat dabei durchaus nicht nöthig eitel zu sein, oder seine eigenen Productionen zu überschätzen. Vor ein paar Tagen erhielt ich als Ergänzung zu einem Theile Ihrer Mittheilungen das Crellesche Journal mit der Abhandlung von Eisenstein über die cubischen Formen. Es ist eine vortreffliche Abhandlung, welche uns manches aufklärt was wir bisher nur unbestimmt gleichsam vermuthet hatten, nur eins habe ich als eine Hauptsache bei oberflächlicher Lectüre noch vermißt, nämlich daß jede Primzahl welche cubischer Rest von p ist sich entweder durch die Hauptform oder durch eine der nichtäquivalenten associirten Formen darstellen läßt und nur durch eine.

Was übrigens die Anzahl der Zahlen $\Psi(\alpha)$ betrifft welche die Kreistheilung gewährt, so ist dieselbe durch folgende höchst einfache Regel gegeben: „Die Anzahl der wesentlich verschiedenen Zahlen $\Psi(\alpha)$ ist immer gleich derjenigen ganzen Zahl welche nur um einen echten Bruch größer ist als $\frac{\lambda}{6}$"; also für $\lambda = 5$ ist die Anzahl 1, für $\lambda = 7$ Anzahl 2, für $\lambda = 11$ Anzahl 2, $\lambda = 13$ giebt diese Anzahl 3, $\lambda = 17$ ebenfalls 3, $\lambda = 19$ Anzahl 4 etc. Schon bei $\lambda = 11$ giebt die Kreistheilung nicht mehr alle möglicherweise durch die $f(\alpha)$ zu bildenden $\Psi(\alpha)$ welche der Gleichung $\Psi(\alpha)\,\Psi(\alpha^{-1}) = p$ genügen.

Von besonderer Wichtigkeit scheint mir der Gesichtspunkt den Sie mir mitgetheilt haben: wenn p nicht als $Nf(\alpha)$ darstellbar ist, daß alsdann immer einige Zahlen (endlich viele und zwar wenige) existiren von der Art daß mp als $Nf(\alpha)$ darstellbar sei für alle möglichen Werthe des $p = 2\varkappa\lambda + 1$. Es ist auch leicht anderweitig zu zeigen daß eine endliche Anzahl dieser m ausreichend ist, wie viele aber nöthig und ausreichend sind mag wohl denselben Rang der Schwierigkeit haben als die Untersuchung der Anzahl quadratischer Formen für eine Determinante.

Eisensteins Art und Weise zu den associirten Formen zu gelangen gefällt mir nicht recht, ich glaube man müsse dazu durch die Lösung folgender Aufgabe kommen nämlich: zu untersuchen welche Formen des e^{ten} Grades mit e Unbestimmten haben die Eigenschaft

daß sie nur solche Divisoren haben, welche e^{te} Potenzreste von einer gegebenen Primzahl p sind (wo e auch vorläufig Primzahl ist) und $p \equiv 1 \bmod e$.

Grüßen Sie JOACHIMSTHAL, RÜHLE und EISENSTEIN recht herzlich von mir, ich werde ihnen nichts schuldig bleiben sondern nächstens bei passender Gelegenheit als z. B. zu meinem Geburtstage auch auf deren und Ihr Wohl trinken. Ich fasse nun ihren Geburtstag und das Neujahr zusammen und schenke Ihnen nichts weniger als meine herzliche Liebe wie immer

Ihr

KUMMER.

Breslau den 18. October 1845.

Herzlich geliebter Freund!

Nicht allein in der Absicht, daß Sie meine Arbeiten kennen lernen um sie wo es sein kann bei Ihren eigenen zu benutzen, sondern besonders auch um meiner selbst Willen, um für mich etwas Ordnung und Klarheit hineinzubringen schreibe ich Ihnen schon wieder davon, und zwar heute nur über allgemeine Theorie der complexen Zahlen, ohne Anwendungen. Ich werde Ihnen vorzüglich nur eine Sammlung von Sätzen geben können aber in einer wohlgeordneten Folge, so daß Sie sich allenfalls Schritt für Schritt die Beweise selbst machen können, auch werde ich dieselben wohl hier und da mit Glossen versehen. Die Bezeichnungen, welche ich habe, werden Ihnen wohl aus dem vorigen Briefe und sonst schon bekannt sein, nämlich $\lambda - 1 = e \cdot f$ und q zum Exponenten f gehörig modulo λ und Primzahl aber kein Factor von $N(\eta - \eta_1)$. Ich unterscheide auch hier gar nicht mehr Primzahlen p von den q, sondern nehme die zum Exponenten 1 gehörigen Primzahlen als eben in demselben Rechte befindlich als die andern, es sind für diese nur die Perioden eingliedrig und $f = 1$.

Nun beginnt die Reihe von Sätzen:

1. Lehrsatz: Jede complexe Zahl $f(\alpha)$ läßt sich und zwar nur auf eine einzige Weise in die Form setzen

$$f(\alpha) = \Phi(\eta) + \alpha \Phi_1(\eta) + \alpha^2 \Phi_2(\eta) + \cdots + \alpha^{f-1} \Phi_{f-1}(\eta).$$

2. Erklärung: Wenn für $\eta = u$ (u Wurzel der bekannten Congruenz) zugleich folgende Congruenzen Statt haben:

$$\Phi(u) \equiv 0, \; \Phi_1(u) \equiv 0, \; \Phi_2(u) \equiv 0, \; \ldots \; \Phi_{f-1}(u) \equiv 0 \bmod q$$

so soll dieses kurz ausgedrückt werden durch: $f(\alpha) \equiv 0 \bmod q$, für $u = \eta$.

3. Lehrsatz: Wenn $f(\alpha) \equiv 0 \bmod q$ für $u = \eta$, so ist $Nf(\alpha) \equiv 0 \bmod q^f$ und umgekehrt; wenn $Nf(\alpha) \equiv 0 \bmod q^f$, so ist $f(\alpha) \equiv 0 \bmod q$ für $\eta = u$ (d. h. nicht für eine bestimmte, sondern für irgend eine Congruenzwurzel u). Dieß ist der Satz welchen ich Ihnen schon bei Ihrer Anwesenheit in Breslau mitgetheilt habe. . . .

   Bemerkung: Die jetzt folgenden Sätze über Theilbarkeit einer complexen Zahl durch eine ganze Zahl beziehen sich alle nur auf den Fall, wo die complexe Zahl nicht in ihrem entwickelten Zustande fertig ist, sondern als Product complexer Factoren gegeben.

4. Lehrsatz: Wenn eine complexe Zahl aus Factoren besteht, und es wird ein Factor $\equiv 0 \bmod q$ für $u = \eta_r$, so behält auch die Zahl nach Ausführung der Multiplication diese Eigenschaft; und umgekehrt: Wenn eine entwickelte complexe Zahl $\equiv 0 \bmod q$ für $u = \eta_r$ ist, und dieselbe läßt sich in Factoren zerlegen, so muß auch einer der Factoren $\equiv 0 \bmod q$ für $u = \eta_r$ sein.

Ein wichtiger Satz, welcher sich fast von selbst zu verstehen scheint, aber doch eines Beweises bedarf so gut als die übrigen; daß ich diesen Satz als sich von selbst verstehend angenommen, und auch auf den Fall stillschweigend übertragen hatte, wo zwei Factoren für $u = \eta$ congruent Null werden mod q, wo also das Product $\equiv 0 \bmod q^2$ wird, hat mich lange an einer richtigen Erkenntnis des Gegenstandes gehindert, in diesem Falle ist nämlich für $u = \eta$ die Form des unentwickelten Productes durch q^2 theilbar in der entwickelten Form aber ist es nur durch q theilbar.

Lehrsatz: Wenn eine (in Form eines Productes erscheinende) complexe Zahl für alle verschiedenen Congruenzwurzeln $u = \eta$, $u_1 = \eta$, $u_2 = \eta$, $\ldots u_{e-1} = \eta$ einzeln congruent Null wird mod q, so ist sie selbst durch q theilbar, wenn aber diese complexe Zahl für irgend eine Congruenzwurzel $u_r = \eta$ nicht $\equiv 0$ wird mod q, so ist diese Zahl auch nicht durch q theilbar.

Es bezeichne jetzt $f(\eta)$ eine complexe Zahl nur aus Perioden gebildet, von der Art daß $f(\eta)f(\eta_1)f(\eta_2)\ldots f(\eta_{e-1})$ durch q, aber nicht durch q^2, theilbar ist, es sei ferner $f(\eta_1)f(\eta_2)\ldots f(\eta_{e-1}) = F(\eta)$ und u sei diejenige Congruenzwurzel welche der Bedingung $f(\eta) \equiv 0 \bmod q$

für $\eta = u$ genügt (eine dieser Wurzeln muß bekanntlich dieser Bedingung genügen).

Erklärung des Ausdruckes idealer Primfactor einer complexen Zahl:

Wenn eine complexe Zahl, nachdem sie mit $F(\eta_r)$ multipliert ist, durch q theilbar ist, so wollen wir dieß so ausdrücken: sie enthält den zu $\eta_r = u$ gehörigen idealen Primfactor des q.

Wenn ferner eine complexe Zahl, nachdem sie durch eine beliebig hohe Potenz von $F(\eta_r)$ als $\{F(\eta_r)\}^m$ multipliceirt ist, den realen Factor q^μ, aber nicht $q^{\mu+1}$ enthält, wo $\mu < m$ ist so wollen wir dieß so ausdrücken: sie enthält den zu $\eta_r = u$ gehörigen idealen Primfactor des q μ mal.

Es wird Sie diese Definition beim ersten Anblick ziemlich kalt lassen, und Sie können vielleicht denken es wäre einfacher zu definiren daß wenn $\Phi(\alpha)$ für $\eta = u$ den realen Factor q μ mal enthält sie als den entsprechenden idealen Factor ebenso oft enthaltend anzusehen sei. Dieß stimmt für den Fall $\mu = 1$ vollkommen mit der gegebenen Erklärung; für $\mu > 1$ aber ist es ganz nichtsnutzig, weil dann eine und dieselbe complexe Zahl jenachdem sie als Product oder entwickelt erscheint den idealen Factor das einemal öfter als das anderemal enthalten würde. Bei der von mir gewählten Definition sind die idealen Factoren einer Zahl vollkommen fest, welches in den folgenden Sätzen festgestellt wird.

Lehrsatz: Wenn man durch Multiplication mit $(F\eta_r)^m$ gefunden hat, daß eine complexe Zahl den zu $u = \eta_r$ gehörigen idealen Primfaktor des q μ mal enthält, so bleibt dasselbe Resultat auch feststehen, wenn man m beliebig anders jedoch immer $m \geq \mu$ wählt.

Lehrsatz: Wenn man zur Aufsuchung der idealen Primfactoren statt der complexen Zahl $f(\eta)$ aus welcher $F(\eta)$ gebildet ist, irgend eine andere mit denselben oben angegebenen Eigenschaften wählt, so erhält man immer dieselben idealen Primfactoren.

Lehrsatz: Das entwickelte Product mehrer complexen Zahlen hat genau dieselben idealen Primfactoren und auch jeden genau eben so oft, als die Factoren des Productes zusammengenommen.

Lehrsatz: Wenn $\Phi(\alpha)$ m ideale Primfactoren des q (verschiedene oder gleiche) enthält, so enthält $N\Phi(\alpha)$ den Factor

$q^{m f}$, und umgekehrt wenn $N\Phi(\alpha)$ den Factor $q^{m f}$ enthält, so enthält $\Phi(\alpha)$ m ideale Primfactoren des q.

Lehrsatz: Jede bestimmte complexe Zahl enthält eine endliche Anzahl idealer Primfactoren, welche nur auf eine Weise in ihr vorhanden sind (die complexen Einheiten machen hiervon eine Ausnahme).

Lehrsatz: Wenn zwei complexe Zahlen $\Phi(\alpha)$ und $\Psi(\alpha)$ dieselben idealen Primfactoren haben, so sind sie einander gleich bis auf eine complexe Einheit welche als Factor der einen Zahl hinzutreten kann.

Lehrsatz: Eine complexe Zahl $\Phi(\alpha)$ ist durch eine andere $\Psi(\alpha)$ theilbar, wenn jene alle idealen Primfactoren von dieser, und zwar alle wenigstens ebenso oft enthält, und es ist diese Bedingung nicht allein hinreichend zur Theilbarkeit, sondern auch nothwendig. Der Quotient enthält den Ueberschuß der idealen Factoren des Dividendus über die des Divisors.

Dieser letzte Satz rechtfertigt die Benennung idealer Primfactor vollkommen, denn man kann mit ihnen nun wie mit numerischen ganzzahligen Primfactoren rechnen. Die idealen Primfactoren sind für die ganzen complexen Zahlen ohngefähr ebenso nothwendig wie die imaginären Wurzeln für die Theorie der Gleichungen oder der Zerlegung einer ganzen rationalen Function von x in ihre lineären Factoren. Sie sind, will man sie begreifen im philosophischen Sinne, ganz abstruse Dinge, sonst aber sind sie in mathematischer Hinsicht ganz einfache Ausdrücke bestimmter Eigenschaften gegebener complexer Zahlen. Ich bemerke noch folgendes: Wenn eine complexe Zahl nur einen einzigen zu $u = \eta_r$ gehörigen idealen Primfactor des q enthält, so ist sie statt eines idealen ein realer Primfactor des q. Es vereinigen sich auch oft mehrere in einer complexen Zahl steckende ideale Factoren mannigfaltig zu einem einzigen realen Factor. Die Gesetze dieser Vereinigung aber, denen noch nachzuspüren ist, sind nicht so simpel als die Vereinigung der beiden imaginären Factoren $a + bi$ und $a - bi$ zu dem realen $a^2 + b^2$. Die ganze Theorie der complexen Zahlen, welche aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit oder aus Perioden derselben gebildet sind, scheint mir nun in diesem letzten Satze in so weit vollendet und abgemacht zu sein, als man die Frage nach der Realität oder bloßen Idealität der Primfactoren unberücksichtigt läßt, und noch einige Nebensachen und Ausführungen abgerechnet. . . .

Uebermorgen, als den Mondtag gehen meine Vorlesungen an und zwar gleich drei auf einmal zu denen ich mich noch präpariren soll, was bei dem Anfange allemal Schwierigkeiten hat, wenn man sich nicht gleich in medias res hineinstürzen will oder kann.

Leben Sie recht wohl

Ihr

E. KUMMER.

Breslau d. 14. Juni 1846.

Herzlich geliebter Freund!

. . . Ueber die idealen Factoren habe ich mehreres mit DIRICHLET und einiges mit JACOBI verhandelt. Ich gebrauchte dabei immer die bildliche Ausdrucksweise, aus der Chemie entnommen: Die Primfactoren sind die Elemente, die idealen Primfactoren sind diejenigen Elemente welche nicht für sich darstellbar nur in Verbindung mit anderen vorkommen, äquivalente complexe ideale Zahlen sind an sich dasselbe als äquivalente Gewichtsmengen der chemischen Stoffe. Die Aufsuchung der idealen Primfactoren ist die chemische Analyse, die in meinem Aufsatze mit $\mathfrak{c}$ oder ψ bezeichneten complexen Zahlen sind die Reagentien und die ganze Zahl q, welche als realer Factor heraustritt, ist der Niederschlag welcher nach Anwendung des richtigen Reagens sich zeigt. Kurz die ganze Begriffssphäre der Chemie stimmt auf eine eclatante Weise mit derjenigen zusammen in welcher sich die Lehre von den complexen Zahlen bewegt. DIRICHLET hat mich sehr ermahnt die Theorie bald fertig auszuarbeiten und CRELLE zum Drucke zu übergeben. Auch hat er mir erzählt und gezeigt, nämlich aus mündlichen und schriftlichen Aeußerungen von GAUSS, daß GAUSS schon bei Anfertigung des Abschnittes de compositione formarum aus den Disqu. arith. etwas ähnliches wie ideale Factoren zu seinem Privatgebrauche gehabt hat, daß er dieselben aber nicht auf sicheren Grund zurückgeführt hat, er sagt nämlich in einer Note seiner Abhandlung über die Zerfällung der ganzen rat. Functionen in lineäre Factoren ohngefähr so: „Wenn ich hätte auf dieselbe Weise verfahren wollen wie die früheren Mathematiker mit dem imaginären, so würde eine andere meiner Untersuchungen die sehr schwierig ist sich auf sehr leichte Weise haben machen lassen." Daß hier die compositio formarum gemeint ist, hat DIRICHLET später mündlich von GAUSS erfahren. Ich habe ferner DIRICHLET meine Vermuthung mitgetheilt daß zwischen

den Formenanzahlen wie sie DIRICHLET gefunden hat, und zwischen den Summen der Potenzreste gewisse einfache Beziehungen Statt haben möchten, und ich habe ihm versprochen ihm meine Arbeit über diejenigen Exponenten, zu welchen die idealen Primfactoren erhoben zu wirklichen complexen Zahlen werden, mitzutheilen. Noch ist zu bemerken daß ich mit DIRICHLET als meinem Vetter Brüderschaft gemacht habe. BORCHARD habe ich besucht und kennen gelernt. EISENSTEIN hat keinen recht guten Eindruck dießmal auf mich gemacht, er spielt zu sehr den Sonderling, er sucht noch seine vierte Dimension und ich habe als sein väterlicher Freund ihn überhaupt vor der Art des Götzendienstes gewarnt, nach welcher man das, was rein analytischer Natur ist, sich räumlich zu versinnbildlichen trachtet, dasselbe kann dadurch leichter faßlich und anschaulich werden, aber es wird dadurch aus seiner höheren Stellung herabgezogen. JOACHIMSTHAL ist inzwischen ein sehr berühmter Mathematiker geworden, die comptes rendus sind seiner Ehre voll und LIOUVILLES Journal hat einen Aufsatz wo sein Name im Titel florirt. . . .

Von meinen eigenen Arbeiten erwähne ich noch eine recht nette Sache. Ich habe nämlich ganz allgemein die Aufgabe gelöst Vierecke zu finden, deren Seiten und Diagonalen rational sind. Dieselbe wird dadurch interessant daß CHASLES (fälschlich) meint die Inder hätten sich diese Aufgabe gestellt und in ihrer Weise gelöst, ferner dadurch daß die Pointe des ganzen darauf hinauskommt eine Wurzel $\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$ rational zu machen, welches EULER schon in der Algebra behandelt und wovon JACOBI später gezeigt hat daß die Theorie der elliptischen Functionen diese Aufgabe löst. Jede einzelne Lösung dieser Aufgabe giebt eine allgemeine, drei willkürliche rationale Zahlen enthaltende Lösung der obigen Aufgabe über das Viereck. Die Vierecke, welche man so erhält, sind Vierecke ohne Eigenschaften oder besser ohne andere gewöhnliche Eigenschaften, neben anderen, welche z. B. einem Kreise eingeschrieben sind und dergl. Nun aber schreibe ich nichts weiter als daß ich Sie nochmals bitte recht bald hierher zu kommen, damit wir alles was wir einander mitzutheilen haben mündlich besprechen können.

Ihr Sie herzlich liebender Freund

E. KUMMER.

Breslau d. 13. Aug. 1846

Herzlich geliebter Freund!

Ihre Untersuchungen über die allgemeinsten zerlegbaren Formen, sind mir von sehr großem Interesse, weil dadurch die Willkürlichkeit in den zu untersuchenden Formen aufgehoben wird, ebenso die Untersuchungen über die ABELschen Gleichungen.

Unsere mathematische Literatur besteht wie Sie wissen aus Abhandlungen, kleineren und größeren. Darum wollte ich Ihnen den wohlmeinenden lehrerlichen Rath geben, Ihre mathematischen Studien bald anfangs so zu betreiben, daß Abhandlungen entstehen, d. h. daß Sie gewisse Stoffe zu einer gewissen Abrundung verarbeiten, sodaß sie wenn auch nach vielen Seiten hin das Bedürfniß nach weiterem Fortschritte in sich tragend, doch als etwas abgeschlossenes Ganzes gelten können. Was ich hier sage ist von einer allgemeinen Bedeutung, es betrifft nämlich überhaupt alles was Entwickelung ist, also auch die Weltgeschichte das Leben der Staaten der Individuen etc. Ueberall hier ist dies unbefriedigende jedes besonderen Zustandes oder des bisher erreichten vorhanden und zwar nothwendig weil dieses den Fortschritt nothwendig bedingt, aber es ist auch ebenso das Bedürfniß da die errungenen Zustände zu fixiren in der relativen Vollendung, welche sie erreicht haben. Es ist überall nicht ein bloßer Fortschritt sondern auch ein Bestehen, überall mouvement und Stabilität. Huldigen Sie darum auch in richtigem Maaße der letzteren, so werden schöne Abhandlungen entstehen, und damit sie wie DIRICHLET sagt lesbar werden, so müssen Sie etwas episches Moment hineinbringen, nur nicht zu viel, sonst werden sie langweilig wie so manche epische Versuche in CRELLES Journal.

Ich arbeite jetzt mein rationales Viereck aus. Außerdem habe ich noch etwas anderes gefunden. Sie wissen vielleicht, daß ich vor zwei Jahren einem meiner Zuhörer Namens WITTIBER die Aufgabe zu einer zu fertigenden Dissertation gab „Systeme von Curven zu suchen, welche sich selbst überall rechtwinklig schneiden", so wie die Kegelschnitte welche dieselben beiden Brennpunkte haben. Dieser hat nun endlich nach zweijähriger Arbeit ein solches System von Curven vierten Grades gefunden. Dasselbe interessirte mich sehr und ich griff selbst noch einmal die Aufgabe an und fand eine allgemeine Formel für dergleichen Systeme welche noch eine ganz willkürliche Function in sich enthält. Die in dieser allgemeinen Formel enthaltenen Systeme

haben unter andern stets die Eigenschaft eine Anzahl Brennpunkte (nach PLÜCKERS Definition) zu enthalten, welche für alle Curven eines Systems dieselben sind, wie bei den confocalen Kegelschnitten. . . .

Ihr Sie herzlich liebender

E. KUMMER.

Geliebter Freund!

Ihre freundliche Einladung nehme ich an, wie sich von selbst versteht, ich komme Sonnabend mit dem ersten Zuge etwa um 10 Uhr in Haynau an, wo es mich sehr freuen wird Sie mit „drachenbespannter Kalesche“ zu finden. Ich bringe mir erstens gute Wasserstiefeln mit und zweitens drei Abhandlungen die ich seit Ihrem letzten Hiersein ins Reine geschrieben habe: 1. über Gamma, 2. Systeme sich rechtwinklig schneidender Curven, 3. die Zerlegung der complexen. Die Zeit wird uns nicht lang werden, selbst wenn das Wetter zur Jagd nicht immer günstig sein sollte. Die Fortsetzung mündlich auf den Sonnabend d. 26.

Ihr

E. KUMMER.

Breslau d. 23. Septbr. 1846.

Herzlich geliebter Freund!

Ihre mir versprochene Gelegenheit um die Bücher, welche ich richtig besorgt habe, Ihnen zuzuschicken währt mir etwas zu lange, darum entschließe ich mich jetzt Ihnen dieselben per Post zu schicken und Ihnen zugleich zu melden, daß mir die Strapazen der Jagd sehr gut bekommen sind. Einer der beiden Hasen, die Sie mir mitgegeben haben und welcher beiläufig gesagt sehr gut geschmeckt hat wie auch CAUER bezeugen kann, mußte offenbar auch von mir geschossen oder wenigstens angeschossen sein, denn seine Wunden hatten unterwegs wo er zu meinen Füßen lag von neuem so stark geblutet, daß es sogar durch die Tasche hindurchgedrungen war, welches bekanntlich ein sicheres Zeichen von der Gegenwart des Mörders ist. Da ich nun einmal bei der Jagd stehe, so füge ich hier sogleich die Bitte bei beiliegendes Jagdmesser dem Herrn Förster HÖNEL in meinem Namen zu übergeben und ihm für die Mühe die er sich unverdrossen um meinetwillen gegeben hat nochmals zu danken.

Die Abhandlung von VANDERMONDE habe ich, wenn auch noch nicht mit der gehörigen Andacht, durchgelesen und sie auch, was die Darstellung betrifft, gedankenreich und vortrefflich gefunden, weniger wird Ihnen der Artikel BERNOULLIsche Zahlen in KLÜGELS math. Wörterbuch genügen, ich lege darum außerdem SCHERKS Abhandlung bei welche, so viel ich weiß, mehr enthält.

Die Factorenzerfällung des (α, x) habe ich vollständig ergründet zunächst das Beispiel wo $\beta^{21} = 1$, $\alpha^3 = 1$, $x^7 = 1$, oder $\alpha = \beta^7$, $x = \beta^3$, hier ist

$$(\alpha, x) = x + x^6 + \alpha(x^3 + x^4) + \alpha^2(x^2 + x^5) = (\alpha^2 - x - x^2)^2(\alpha - x - x^2)^4 E(\beta)$$

wo $E(\beta)$ eine complexe Einheit ist. Die sechs zusammengehörigen Zahlen

$$\alpha - x - x^2,\ \alpha - x^2 - x^4,\ \alpha - x^3 - x^6,\ \alpha - x^4 - x,\ \alpha - x^5 - x^3,\ \alpha - x^6 - x^5,$$

sind nämlich als gleich zu erachten, weil sie sich nur durch complexe Einheiten unterscheiden, oder jede derselben ist durch jede andere theilbar, und der Quotient eine Einheit, ebenso wie $1 - x$, $1 - x^2$, $1 - x^3 \dots$ Doch nun zum allgemeinen: sei $\beta^{p\lambda} = 1$, $\alpha^\lambda = 1$, $x^p = 1$, $p = \mu\lambda + 1$, p und λ Primzahlen $\alpha = \beta^p$, $x = \beta^\lambda$, so läßt sich p wirklich oder ideal stets folgendermaßen in ein Product von $(p-1)\cdot(\lambda-1)$ Factoren zerlegen:

$$p = \{f(\alpha x) f(\alpha x^2) f(\alpha x^3) \cdots f(\alpha x^{p-1})\} \cdot \{f(\alpha^2 x) f(\alpha^2 x^2) f(\alpha^2 x^3) \cdots f(\alpha^2 x^{p-1})\} \dots$$
$$\{f(\alpha^{\lambda-1} x) f(\alpha^{\lambda-1} x^2) f(\alpha^{\lambda-1} x^3) \cdots f(\alpha^{\lambda-1} x^{p-1})\}.$$

Hierbei unterscheiden sich die je $p - 1$ in Klammern eingeschlossenen Factoren nur durch complexe Einheiten, oder es ist allgemein $f(\alpha^\varkappa x^m) = f(\alpha^\varkappa x^n) E(\beta)$. Dieselben lassen sich also durch eine $(p-1)^{\text{te}}$ Potenz ersetzen, sodaß man auch hat

$$p = f(\alpha x)^{p-1} f(\alpha^2 x)^{p-1} f(\alpha^3 x)^{p-1} \cdots f(\alpha^{\lambda-1} x)^{p-1} \cdot E(\beta)\,{}^*)$$

oder

$$p = \{f(\alpha x) f(\alpha^2 x) f(\alpha^3 x) \cdots f(\alpha^{\lambda-1} x)\}^{p-1} E(\beta).$$

Mit Hilfe dieser wirklichen oder idealen Factoren des p wird nun (α, x) folgendermaßen zerlegt

$$(\alpha, x) = f(\alpha x)^{\mu m_1} \cdot f(\alpha^2 x)^{\mu m_2} \cdot f(\alpha^3 x)^{\mu m_3} \cdots f(\alpha^{\lambda-1} x)^{\mu m_{\lambda-1}} \cdot E(\beta),$$

wo $\mu = \frac{p-1}{\lambda}$ und $m_1, m_2, m_3 \dots m_{\lambda-1}$ dieselben Zahlen sind als im

*) NB. Die mit $E(\beta)$ bezeichneten complexen Einheiten sind nicht überall dieselben, sondern nur überhaupt Einheiten, quod vix monendum erat.

Königsberger Programm, nämlich $\varkappa \cdot m_\varkappa = 1$, mod λ und alle in den Grenzen 0 und λ excl.

Was Ihre Bemerkung betrifft durch welche Sie die Widersinnigkeit einer solchen Zerlegung darthun wollten, so wollen wir jetzt (α, x) als Function von β allein ansehen, so daß $(\alpha, x) = F(\beta)$ ist, so ist allemal $F(\beta^{p(\lambda-2)+1}) = (\alpha^{-1}, x)$; der reciproke Ausdruck (α^{-1}, x) läßt sich also wirklich immer darstellen, indem man nur statt β eine passende Potenz von β setzt. Uebrigens enthält wirklich wie Sie sehen (α, x) gewisse Factoren mit (α^{-1}, x) gemein, welches aber nichts schadet, weil die Factoren nur gruppenweise verschieden sind.

Mir scheint vorläufig, daß dieser Zerlegung des (α, x) nicht dieselbe Bedeutung zukommt, als der Zerlegung des $(\alpha, x)^\lambda$ in die von α allein abhängigen Primfactoren, es ist aber ganz angenehm sie einmal ergründet zu haben. . . .

Leben Sie wohl besuchen Sie mich möglichst bald einmal und lassen Sie wenn dies nicht geschehen kann wenigstens schriftlich bald etwas von sich hören.

Ihr Sie herzlich liebender Freund

E. Kummer

Breslau, d. 17. Octbr. 1846.

Breslau, d. 7. Decbr. 1846.

Herzlich geliebter Freund!

Ich gratulire zum Geburtstage! und wenn Sie meine Gratulation auch erst morgen bekommen, so habe ich doch zur rechten Zeit gratulirt. . . . Ihre mathematischen Mittheilungen haben mich sehr erfreut. Treiben Sie nur das Geschäft der Redaction Ihrer Arbeiten mit rechter Liebe und Sorgfalt, und erinnern Sie sich der epischen Breite, welche wenn sie mit Maaß angewendet wird sehr vorzüglich ist, namentlich das Aussprechen des Gedankengehalts der Arbeiten sodaß der Leser alsbald weiß worauf es überall ankommt. Den 19. Band von Crelles Journal hatte ich an Morbach verliehen, habe mir ihn aber seit einiger Zeit wiedergeholt, um, wenn ein Bote von Ihnen kommt, denselben bereit zu haben. Die Bücher aus der hiesigen Bibliothek schicken Sie mir wohl der Verabredung gemäß entweder noch vor Weihnachten oder bringen Sie selbst zu Weihnachten mit. Vor einigen Tagen habe ich aus unserer Bibliothek endlich den Band der Petersb. Academie

erhalten in welchem EULERS Abhandlung über die Rationalität von $\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}$ steht. EULERS Methode ist zweckmäßiger als die, welche ich selbst gefunden habe, auch viel einfacher als die Anwendung der Elliptischen Functionen, mit welcher sie nur in gewissem Sinne zusammenfällt, welches ich nicht sogleich näher angeben kann. Ich arbeite immerfort noch über dem rationalen Vierecke, und werde noch lange daran arbeiten können, wenn ich auch interessante Besonderheiten mit einschließe

Meine zahlentheoretischen Nachdenkungen führen mich soeben dahin über die Anzahl Ihrer Jahre, nämlich 23 Betrachtungen anzustellen. Sie sind jetzt in der Zahl der Jahre, für welche notorisch die Zerlegbarkeit in 22 complexe Factoren nicht mehr Statt hat. Die Zerlegbarkeit in zwei reciproke complexe Factoren findet aber immer Statt, wenn Sie daher in diesem Jahre sich in zwei reciproke complexe Factoren zerlegen wollen, so steht von zahlentheoretischem Standpunkte nichts entgegen. . . . Nun leben Sie wohl und behalten Sie immer lieb Ihren Sie herzlich liebenden Freund

E. KUMMER.

Breslau, d. 20. Febr. 1847.

Herzlich geliebter Freund!

Als Antwort auf Ihr letztes liebes Schreiben kommt dieß Briefchen zwar etwas spät, ich will Ihnen aber dennoch namentlich über Ihren vorläufig auf unbestimmte Zeit veränderten Lebensplan etwas schreiben, und zwar zunächst nur dieß, daß ich Sie darum nur um so höher schätze, daß Sie um Ihrer Familie willen dieses Opfer bringen. Es ist auch gar nicht nöthig, daß Ihre Banquier-Geschäfte auf Ihre Wissenschaft auf die Dauer einen nachtheiligen Einfluß üben, nehmen Sie als Beispiel mich selbst, ich habe zu der Zeit wo ich in Liegnitz mit 24 Stunden unter denen fast gar keine mathematischen waren, in den ersten Jahren meines dasigen Aufenthaltes wenigstens ebenso viel geleistet als später unter den äußerlich günstigsten Verhältnissen. Ferner LAVOISIER, der berühmte Chemiker war in Paris vor der Revolution Generalpächter und nebenbei eine der ersten Zierden der Academie. Wenn Sie für einige Zeit sich jetzt ganz den Geschäften widmen um sich ordentlich einzuarbeiten, so werden Sie um so eher wieder sich der Wissenschaft widmen können. Die Landwirtschaft

erscheint allerdings günstiger für wissenschaftliche Studien, aber Geldgeschäfte schließen dieselben auch nicht aus. Ich selbst habe in diesem Jahre vielleicht noch weniger mathematisch gearbeitet als Sie. Ich habe nämlich noch keinen neuen Stoff gefunden, und um doch etwas zu thun, werde ich eine Recension über die von JACOBI herausgegebenen dem Könige dedicirten Abhandlungen schreiben. . . . — Ich hoffte immer Sie in kurzem einmal hier zu sehen, denn ich denke, die Geschäfte müssen Sie bald einmal herführen, sollten diese es nicht thun, so thun Sie es doch selbst recht bald. Die besten Grüße von den Meinen an Sie und die Ihrigen Ihr Sie herzlich liebender

E. KUMMER.

Breslau, d. 2. April 1847.

Herzlich geliebter Freund!

Versetzen Sie sich wieder einmal in die complexen Zahlen und Einheiten, wo λ, α, u. s. w. lauter bekannte Zeichen sind. Nehmen Sie auch vorläufig einmal folgenden Satz als bewiesen an:

I. „Wenn eine Einheit $E(\alpha)$ die Form hat $E(\alpha) = c + \lambda f(\alpha)$, ($c$ reale g. Z.), so ist $E(\alpha)$ eine λ^{te} Potenz einer andern Einheit."

Der umgekehrte Satz versteht sich ganz von selbst, aber auch dieser ist für $\lambda = 5$ und $\lambda = 7$ sehr leicht zu beweisen, und so überall wo man die Fundamental-Einheiten kennt. Einen allgemeinen Beweis habe ich bisher noch nicht.

II. Es sei ferner λ eine solche Primzahl, für welche die Anzahl aller nicht äquivalenten Formen (oder nach meiner Auffassung der nicht äquivalenten idealen complexen Zahlen) nicht durch λ selbst theilbar ist. Dieß gilt offenbar wieder für $\lambda = 5$, $\lambda = 7$, und für unendlich viele Primzahlen λ, ich weiß nicht ob für alle. Es wird unter dieser Voraussetzung, wenn $(f(\alpha))^\lambda$ eine wirkliche complexe Zahl ist, allemal auch $f(\alpha)$ selbst eine wirkliche complexe Zahl sein; denn die Potenz, welche die ideale Zahl zur wirklichen macht, hat stets mit der Anzahl der nicht äquivalenten Formen einen gemeinschaftlichen Factor.

Für alle diejenigen Primzahlen λ, welche diesen beiden Bedingungen I und II genügen kann ich nun die Unmöglichkeit der Gleichung $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$ vollständig beweisen wie folgt.

Zunächst beweise ich, daß wenn $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$ Statt haben soll, eine der drei Zahlen durch λ theilbar sein muß. Sei x nicht durch λ theilbar, so giebt $x^\lambda = z^\lambda + y^\lambda$ folgende Gleichungen:

$$z + y = a^\lambda \quad \text{und} \quad z + \alpha^r y = E(\alpha) f(\alpha)^\lambda$$

ich verwandle α in α^{-1}, wodurch

$$z + \alpha^{-r} y = E(\alpha^{-1}) f(\alpha^{-1})^\lambda$$

es ist aber

$$E(\alpha^{-1}) = \pm \alpha^s E(\alpha), \quad \text{also} \quad z + \alpha^{-r} y = \pm \alpha^s E(\alpha) f(\alpha^{-1})^\lambda$$

also wenn $E(\alpha)$ eliminirt wird

$$\pm \alpha^s (z + \alpha^r y) f(\alpha^{-1})^\lambda = (z + \alpha^{-r} y) f(\alpha)^\lambda.$$

Hieraus eine Congruenz mod λ gemacht, giebt $f(\alpha)^\lambda \equiv c$ mod λ, ebenso $f(\alpha^{-1}) \equiv c$ mod λ also, weil c nicht durch λ theilbar ist,

$$\pm \alpha^s (z + \alpha^r y) \equiv z + \alpha^{-r} y \quad \text{mod } \lambda$$

oder

$$0 \equiv z + \alpha^{-r} y \mp \alpha^s z \mp \alpha^{s+r} y \quad \text{mod } \lambda.$$

Diese Congruenz kann nicht bestehen, ohne daß eine der Zahlen z oder y durch λ theilbar ist. q. e. d. Es sei also z die durch λ theilbare Zahl.

Anstatt der Gleichung $x^\lambda - y^\lambda = z^\lambda$, wo z durch λ theilbar ist, behandle ich die allgemeinere Gleichung für complexe Zahlen:

$$1) \qquad u^\lambda - v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda} w^\lambda \quad (E(\alpha) \text{ Einheit})$$

wo u, v, w complexe Zahlen sind, w den Factor $1 - \alpha$ nicht weiter enthaltend, und ich setze von u und v nur das voraus, daß sie in folgende Form gebracht werden können:

$$2) \quad u = c + (1-\alpha)^{m\lambda - \lambda + 1} \cdot \Phi(\alpha); \quad v = c + (1-\alpha)^{m\lambda - \lambda + 1} \cdot \Psi(\alpha). \quad (c \text{ real}).$$

Ich zerlege nun $u^\lambda - v^\lambda$ in seine λ complexen Factoren, $u - v$, $u - \alpha v$, $u - \alpha^2 v$, etc. Diese Factoren haben unter sich keinen gemeinschaftlichen Factor außer $1 - \alpha$, diesen aber haben sie alle und zwar jedes nur einmal, eins aber hat ihn alle übrigen male, und dieß ist nach der Voraussetzung (siehe 2) $u - v$ es ist also

$$3) \qquad u - v = e(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda - \lambda + 1} \cdot w_1^\lambda$$

$$4) \qquad u - \alpha^r v = e_r(\alpha)(1 - \alpha^r) t_r^\lambda$$

$e(\alpha)$ und $e_r(\alpha)$ sind Einheiten, w_1 und t_r complexe Zahlen.

(Der Satz: „wenn eine Potenz einer complexen Zahl in Factoren zerlegt wird, welche relative Primzahlen sind, so müssen diese Factoren

selbst ebensolche Potenzen sein, multiplicirt mit Einheiten", folgt klar aus meinen früheren Untersuchungen, noch ist zu bemerken, daß weil w_1^λ und t_r^λ wirkliche complexe Zahlen sind, auch w_1 und t_r selbst solche sein müssen, nach der obigen Voraussetzung.)

Ich substituire in 4) die Werthe des u und v aus 2), so wird, wenn durch $1-\alpha^r$ dividirt ist:

$$5)\qquad c+(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha^r}\right)(\Phi(\alpha)-\alpha^r\Psi(\alpha))=e_r(\alpha)\,t_r^\lambda$$

Hieraus mache ich eine Congruenz modulo λ und bemerke, daß $(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda}$ durch λ theilbar ist, wenn $m>1$, welches hier vorausgesetzt wird, so ist

$$c\equiv e_r(\alpha)\,t_r^\lambda \mod \lambda;$$

es ist aber die λ^{te} Potenz der complexen Zahl allemal einer realen Zahl congruent, also $t_r^\lambda\equiv b \mod \lambda$ folglich

$$c\equiv e_r(\alpha)b \mod \lambda,$$

und weil $e_r(\alpha)$ einer realen Zahl congruent ist modulo λ, so ist, nach dem oben angenommenen Satze, $e_r(\alpha)$ gleich einer λ^{ten} Potenz einer andern Einheit, also $e_r(\alpha)t_r^\lambda$ gleich einer λ^{ten} Potenz, gleich u_1^λ.

Dieß in der Gleichung (4) substituirt, giebt

$$6)\qquad u-\alpha^r v=(1-\alpha^r)u_1^\lambda$$

ebenso hat man für irgend einen anderen Werth des r, welchen ich s nenne

$$7)\qquad u-\alpha^s v=(1-\alpha^s)v_1^\lambda$$

und wenn noch die Gleichung 3) hinzugenommen wird:

$$3)\qquad u-v=e(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda-1}\cdot w_1^\lambda$$

und aus diesen u und v eliminirt werden, so erhält man

$$u_1^\lambda-v_1^\lambda=\frac{(\alpha^r-\alpha^s)e(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda-\lambda-1}\cdot w_1^\lambda}{(1-\alpha^r)(1-\alpha^s)}$$

und wenn

$$\frac{(\alpha^r-\alpha^s)(1-\alpha)}{(1-\alpha^r)(1-\alpha^s)}\,e(\alpha)=E_1(\alpha)$$

gesetzt wird

$$8)\qquad u_1^\lambda-v_1^\lambda=E_1(\alpha)(1-\alpha)^{(m-1)\lambda}\cdot w_1^\lambda\,.$$

Diese Gleichung 8) ist nun dieselbe als 1) nur $m-1$ statt m gesetzt. Um aber zu zeigen, daß dieselbe Verwandlung sich wieder mit dieser Gleichung vornehmen läßt, müssen wir auch noch beweisen, daß die

Bedingungen (2), welchen u und v unterworfen sind, analog auch für u_1 und v_1 gelten, oder dass

$$u_1 = c_1 + (1-\alpha)^{(m-2)\lambda+1}\Phi_1(\alpha), \quad v_1 = c_1 + (1-\alpha)^{(m-2)\lambda+1}\Psi_1(\alpha).$$

Zu diesem Zwecke wende ich die Gleichung (5) an, in welcher, wie oben gezeigt worden, $e_r(\alpha)t_r^\lambda = u_1^\lambda$ zu setzen ist, dieselbe giebt so:

$$(9) \qquad c \equiv u_1^\lambda \mod (1-\alpha)^{(m-1)\lambda}.$$

Ich setze ferner

$$u_1 = a + (1-\alpha)\Theta,$$

(wo a real, Θ complex, in diese Form kann jede complexe Zahl gesetzt werden), so ist:

$$(10) \quad u_1^\lambda = a^\lambda + \lambda(1-\alpha)a^{\lambda-1}\Theta + \lambda\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)(1-\alpha)^2 a^{\lambda-2}\Theta^2 + \cdots + (1-\alpha)^\lambda\Theta^\lambda$$

und weil

$$\lambda = (1-\alpha)^{\lambda-1}e(\alpha),$$

so folgt

$$(11) \qquad u_1^\lambda \equiv a^\lambda \mod (1-\alpha)^\lambda.$$

Aus (9) und (11) folgt nun

$$c \equiv a^\lambda \mod (1-\alpha)^\lambda$$

und hieraus

$$c \equiv a^\lambda \mod \lambda^2.$$

(Ich glaube diese Folgerung wird Ihnen klar sein.)

Wenn aber $c \equiv a^\lambda \mod \lambda^2$ so hat man auch $c \equiv c_1^\lambda \mod \lambda^n$, wo n jede beliebig große Zahl bedeutet also auch

$$c \equiv c_1^\lambda \mod (1-\alpha)^{(m-1)\lambda}.$$

Diese Congruenz mit 9 verbunden giebt

$$u_1^\lambda \equiv c_1^\lambda, \mod (1-\alpha)^{(m-1)\lambda}$$

hieraus folgt nun, daß von den λ Factoren des $u_1^\lambda - c_1^\lambda$ jeder einen Factor $1-\alpha$ enthalten muß, nur einer dieser Factoren, für welchen man offenbar den Factor $u_1 - c_1$ nehmen kann, muß den Ueberschuß enthalten, also den Factor $1-\alpha$ $((m-1)\lambda - \lambda + 1)$ mal, sodaß

$$u_1 = c_1 + (1-\alpha)^{(m-2)\lambda+1}\Phi_1(\alpha).$$

Was nun für u_1 bewiesen ist gilt offenbar ebenso für v_1, also hat man auch

$$v_1 = c_1 + (1-\alpha)^{(m-2)\lambda+1}\Psi_1(\alpha).$$

Aus der Gleichung (1) mit ihren Bedingungen für u und v folgt also eine ebensolche Gleichung (8) in welcher m um eine Einheit kleiner geworden ist, mit den entsprechenden Bedingungen für u_1 und v_1. Aus dieser folgt nun ebenso eine neue Gleichung mit ihren Bedingungen und so fort, bis man endlich zu dem Werthe $m = 1$ gelangt, oder zu der Gleichung

$$u^\lambda - v^\lambda = E_{m-1}(\alpha)(1-\alpha)^\lambda w^\lambda$$

wo w keinen Factor $1-\alpha$ enthält. Diese Gleichung aber ist unmöglich weil $u^\lambda - v^\lambda$, wenn es überhaupt durch $1-\alpha$ theilbar ist, diesen Factor wenigstens $\lambda + 1$ mal enthalten muß.

Dieß beweise ich endlich so: Wenn von den λ Factoren des $u^\lambda - v^\lambda$ nämlich $u - v$, $u - \alpha v$, $u - \alpha^2 v$, etc. einer durch $1-\alpha$ theilbar ist, so sind es alle, man hat also

$$u - v = (1-\alpha)\Theta, \quad u - \alpha v = (1-\alpha)\Theta_1, \quad u - \alpha^2 v = (1-\alpha)\Theta_2 \quad \text{etc.}$$

aus $u = v + (1-\alpha)\Theta$ folgt aber

$$u^\lambda = v^\lambda + \lambda(1-\alpha)v^{\lambda-1}\Theta + \lambda\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)(1-\alpha)^2 v^{\lambda-2}\Theta^2 + \cdots$$
$$+ \lambda(1-\alpha)^{\lambda-1} v\,\Theta^{\lambda-1} + (1-\alpha)^\lambda \Theta^\lambda,$$

hieraus mache ich eine Congruenz modulo $(1-\alpha)^{\lambda+1}$, so ist

$$u^\lambda \equiv v^\lambda + \lambda(1-\alpha)v^{\lambda-1}\Theta + (1-\alpha)^\lambda\Theta^\lambda;$$

$$u^\lambda - v^\lambda \equiv (1-\alpha)^\lambda \left\{ \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots(1-\alpha^{\lambda-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)} v^{\lambda-1}\Theta + \Theta^\lambda \right\} \bmod (1-\alpha)^{\lambda+1},$$

der in Klammern eingeschlossene Ausdruck wird nun noch einmal modulo $1-\alpha$ untersucht, wo sich findet, daß er durch dasselbe theilbar ist. Es ist nämlich

$$\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\ldots(1-\alpha^{\lambda-1})}{(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)\ldots(1-\alpha)} \equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda-1) \mod (1-\alpha)$$

also nach dem WILSONschen Satze congruent -1; ferner ist $\Theta \equiv b \mod (1-\alpha)$, $v \equiv c \mod (1-\alpha)$, also der in Klammern eingeschlossene Ausdruck, wie leicht zu sehen, durch $1-\alpha$ theilbar, also $u^\lambda - v^\lambda$ durch $(1-\alpha)^{\lambda+1}$ theilbar.

Die Gleichung

$$u^\lambda - v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^\lambda w^\lambda,$$

in welcher w nicht durch $1-\alpha$ theilbar ist, kann also nicht Statt haben, also auch nicht die Gleichung

$$u^\lambda - v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^{m\lambda} w^\lambda$$

wenn

$$u = t + (1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}\cdot\Phi \quad \text{und} \quad v = t + (1-\alpha)^{m\lambda-\lambda+1}\cdot\Psi$$

also auch nicht die Gleichung, welche ein spezieller Fall von dieser ist

$$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda,$$

wo z durch λ theilbar ist. q. e. d.

Wenn Sie mir einen Gefallen thun wollen, so lesen Sie diesen Beweis nur mit dem größten Mißtrauen durch, und mit der Absicht, irgendwo einen Fehler, etwas unhaltbares, zu finden. Ich selbst halte ihn für so sicher bewiesen als irgend einen Satz der Zahlentheorie....

Der obige Beweis von $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ ist erst drei Tage alt, denn erst nach Beendigung der Recension fiel es mir ein wieder einmal diese alte Gleichung vorzunehmen, und ich kam diesmal bald auf den richtigen Weg. Ich wiederhole meine Ermahnungen zur Pünktlichkeit mit der Bemerkung, daß mir eigentlich weit mehr daran liegt von Ihnen Nachrichten zu erhalten, als gerade die Recension zu haben, welche wohl noch ein paar Tage warten kann ehe sie nach Jena geschickt wird.

Empfehlen Sie mich Ihren Eltern, grüßen Sie AULICH

Ihr

E. KUMMER.

Breslau d. 17. Maj 1847.

Herzlich geliebter Freund!

... Nun noch einiges über Voraussetzung II, betreffend die Formenzahl, und Voraussetzung I betreffend die Einheiten welche λ^{te} Potenzen sind. Ich glaube seit Ihrer Abreise von hier darin wieder eine wichtige Einsicht erlangt zu haben welche in dem noch nicht vollständig von mir bewiesenen Satze liegt:

„Für jede Primzahl λ, welche als Factor einer der ersten $\frac{\lambda-3}{2}$ BERNOULLIschen Zahlen vorkommt, ist die Formenanzahl durch λ theilbar."

Vollständig bewiesen aber habe ich folgenden Satz:

„Wenn $f(\alpha)$ eine ideale complexe Zahl ist und $f(\alpha)$ nicht äquivalent $f(\alpha^{-1})$, sondern $f(\alpha)\varphi(\alpha)$ äquivalent $f(\alpha^{-1})$ wo $\varphi(\alpha)$ ideal ist, so kann die λ^{te} Potenz von $\varphi(\alpha)$ d. i. $\varphi(\alpha)^\lambda$ nur dann zu einer wirk-

lichen complexen Zahl werden, wenn λ eine solche Primzahl ist, welche als Factor einer der ersten $\frac{\lambda-3}{2}$ BERNOULLIschen Zahlen vorkommt."

Sollte der erste dieser beiden Sätze sich als wahr bestätigen, wie er im speciellen Falle welchen der zweite Satz enthält wirklich wahr ist, so wäre die Identität der Voraussetzung I mit II bewiesen und zugleich wüßte man, für welche Primzahlen mein Beweis giltig ist.

Ihr

E. KUMMER.

Breslau d. 25. Febr. 1848.

Herzlich geliebter Freund!

Wenn Sie mich jetzt bald einmal besuchen könnten, so würde ich Sie außer unserer sonstigen freundschaftlichen Unterhaltung auch noch mit schönen und interessanten mathematischen Sachen bewirthen können. Ich habe nämlich den Werth von

$$\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^i})}{f(\alpha)}\right), \text{ wo } e(\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\alpha^{\gamma})(1-\alpha^{-\gamma})}{(1-\alpha)(1-\alpha^{-1})}} \quad \text{und } Nf(\alpha) = p \text{ ist},$$

allgemein gefunden und bewiesen, ja nicht nur bewiesen, sondern durch eine genetische Methode gefunden. Dieser Werth ist folgender:

Setzt man

$$\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^i})}{f(\alpha)}\right) \equiv e(\alpha^{\gamma^i})^{\frac{p-1}{\lambda}} \equiv \alpha^{\varkappa},$$

so ist (mod. λ)

$$\varkappa \equiv \frac{\gamma^{2i}(\gamma^2-1)B_1 m_{\lambda-3}}{2\cdot s^2\cdot h} - \frac{\gamma^{4i}(\gamma^4-1)B_2 m_{\lambda-5}}{4\cdot s^2\cdot h} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{\lambda-3}{2}}\gamma^{(\lambda-3)i}(\gamma^{\lambda-3}-1)B_{\frac{\lambda-3}{2}} m_2}{(\lambda-3)s^2\cdot h},$$

wo $B_1, B_2, \ldots B_{\frac{\lambda-3}{2}}$ die BERNOULLIschen Zahlen sind, h der Exponent der Potenz, zu welcher $f(\alpha)$ erhoben werden muß, um wirklich zu werden

$$f(\alpha)^h = c + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$$

$$s = c + c_1 + c_2 + \cdots + c_{\lambda-1}$$

$$m_{2\varkappa} = K_1 + 2^{2\varkappa}K_2 + 3^{2\varkappa}K_3 + \cdots + (\lambda-1)^{2\varkappa}K_{\lambda-1}$$

$$K_r = r\,c\,c_r + (r+1)\,c_1 c_{r+1} + \cdots + (r+\lambda-1)\,c_{\lambda-1}c_{r+\lambda-1}$$

oder

$$m_{2\varkappa} = \sum_{0}^{\lambda-1}{}_r \sum_{0}^{\lambda-1}{}_t\, r^{2\varkappa}(r+t)\,c_r c_{r+t}$$

γ primit. Wurzel von λ.

$\varkappa$ ist in Beziehung auf die Coefficienten von $f(\alpha)^\lambda$ vom zweiten Grade. Auch läßt sich $\varkappa$ durch die Coefficienten von $\psi_1(\alpha)\ \psi_2(\alpha)$ etc. wo $\psi_r(\alpha) = \frac{(\alpha, x)(\alpha^r, x)}{(\alpha^{r+1}, x)}$ ausdrücken und zwar als lineäre Function derselben. Ich ziehe aber den Ausdruck durch die Coefficienten von $f(\alpha)^\lambda$ vor.

Da ich nun diesen nicht unwichtigen Punkt erobert und der Herrschaft der Wissenschaft unterthänig gemacht habe, so können Sie sich denken, daß ich jetzt versuche von hier aus weiter gegen meinen Hauptfeind, das simple Reciprocitätsgesetz, zu operiren. Es fehlt mir auch nicht an Muth dazu, da ich durch die bisherigen Erfolge kühner gemacht worden bin, und da ich mir bewußt bin bis jetzt noch täglich an der gründlicheren Kenntnis meines Gegenstandes zu gewinnen.

. . . Leben Sie wohl, empfehlen Sie mich Ihrer Fräulein Braut und den Ihrigen allen und kommen Sie ja recht bald zu Ihrem Freunde

E. Kummer.

Breslau d. 5. Maj 1848.

. . Können Sie sich wohl vorstellen, daß ich seit acht Tagen mich zweimal als Volksredner versucht habe? Bei einer Versammlung unseres Wahlbezirks trat ich zuerst auf, und sprach über die Eigenschaften eines guten Wahlmannes, welches sehr großen Anklang fand. Ich wurde darauf einstimmig zum Vorsitzenden für die nächste Versammlung gewählt. Auch hatte ich bei dieser ersten Versammlung mein Terrain recognoscirt und gefunden, daß der demokratische Klubb ganz dominierte und zwar nur durch unbedeutende Personen, welche sich zu Wahlmännern aufwerfen wollten. Diese schmeichelten den Arbeitern um zu reüssiren, verdächtigten die Beamten und gebrauchten alle die gewöhnlichen Kunstgriffe. Ich faßte darum den Entschluß wenigstens einen dieser Leute durch meine Person zu verdrängen und hielt in der zweiten Versammlung eine zweite Rede vorzüglich an die Arbeiter gerichtet. Obgleich ich nun gerade die entgegengesetzten Mittel anwendete, als jene Demokraten, nämlich den Arbeitern zu zeigen, was sie seit dem 18. März wirklich erreicht hätten, und ihnen Vertrauen zu der gegenwärtigen Regierung einzuflößen, so reüssirte ich doch vollständig. Die Demokraten hielten zwar noch eine Versammlung am Sonntage, wo sie mich zu verdrängen suchten, es gelang ihnen aber nicht, wie Sie aus der Liste der Wahlmänner ersehen haben. Neben mir sind außer zwei hiesigen Bürgern allerdings nur Mitglieder

des demokratischen Klubbs für Berlin und Frankfurt gewählt worden; überhaupt haben die Demokraten hier durchgängig gesiegt. Ich selbst bin auch gar nicht gegen die Demokraten überhaupt eingenommen, wenn sie es nur gegenwärtig mit der Befestigung einer durchaus freisinnigen constitutionellen Monarchie redlich meinen, und nicht gegen das Königthum zu Felde ziehen, auch nicht streben es heimlich zu untergraben, so sind mir die Demokraten im Grunde lieber als die philisterhaften Bürger, welche an den Wahlen für Frankfurt fast gar nicht mehr Theil nahmen, weil sie für diese wenig oder gar kein Interesse hatten. Die Anforderungen, die ich an einen Deputirten nach Berlin stelle sind 1. wahre Vaterlandsliebe, 2. Einsicht und Verstand, 3. Charakterfestigkeit. Speciellere Anforderungen stelle ich nicht, weil wir die Candidaten nehmen müssen wie sie eben zuletzt bei den engeren und engsten Wahlen übrig bleiben. Wohl uns, wenn wir zuletzt aus zwei guten den besten wählen können, es kann aber auch kommen, daß wir zuletzt aus zwei Uebeln noch das geringere zu wählen haben. Für einen Deputirten nach Frankfurt würden die Anforderungen dieselben sein, nur daß seine Vaterlandsliebe mehr in dem einigen Deutschland als in Preußen ihre Hauptwurzel haben müsse, und daß auch seine Einsicht sich mehr auf das allgemeinere erstrecken möchte. — Ich bin auf meine Würde als Wahlmann sehr stolz wie Sie daraus ersehen können, daß ich mich in Fürstenstein, wo wir am Mittwoch waren, als E. KUMMER, Wahlmann eingeschrieben habe, meine Frau als Wahlweib, den Vetter als Urwähler und LOUISE CAUER als Wahlverwandtschaft. Ich freue mich aber wirklich, daß es mir gelungen ist, besonders darum weil mich nur wahrer Patriotismus dazu vermocht hat meine Schüchternheit zu überwinden, und als Redner vor einer solchen gemischten Versammlung aufzutreten. Sobald ich meinen Pflichten als Bürger werde genügt haben, nämlich unmittelbar nach den Wahlen für die Frankfurter Versammlung, werde ich sogleich wieder meine mathematischen Arbeiten mit voller Kraft vornehmen, denn dann habe ich für Politik für den Augenblick nichts weiter zu thun. Wenn Sie mich in nächster Woche besuchen, worauf ich mich sehr freue so erzähle ich Ihnen das nähere über die hiesigen Wahlen und will Ihnen auch das Concept meiner ersten Rede mittheilen, die zweite war fast ganz frei gesprochen, und nur im allgemeinen prämeditirt. Leben Sie wohl, . . . und empfangen Sie . . . die herzlichsten Grüße der meinigen

Ihr Sie herzlich liebender Freund

E. KUMMER.

Breslau d. 17. Sept. 1849.

. . . Die von der Pariser Akademie gestellte Preisfrage lautet: Trouver pour un exposant entier quelconque n les solutions en nombres entiers et inégaux de l'équation $x^n + y^n = z^n$, ou prouver qu'elle n'en a pas. Sie verlangt also etwas, was ich nicht kann und was wahrscheinlich auch keiner außer mir leisten wird, da ich selbst doch bisher in dieser Sache am weitesten vorgeschritten bin. Ich werde aber doch noch einige Versuche machen, wozu eine genauere Ergründung der complexen Zahlen für den Fall gehört, daß mein λ im Zähler einer der ersten Bernoullischen Zahlen als Faktor vorkommt. . . .

Breslau, d. 28. Decbr. 1849.

Herzlich geliebter Freund!

1. Wenn λ keine Ausnahmszahl wie 37, so haben die beiden Voraussetzungen I und II immer Statt. 2. Wenn λ eine solche Ausnahmszahl wie 37 ist, so ist die Klassenanzahl, und zwar der erste Faktor derselben allemal durch λ theilbar, die Voraussetzung I kann Statt haben oder auch nicht, dies habe ich noch nicht ergründet, für $\lambda = 37$ habe ich berechnet daß die Voraussetzung I nicht Statt findet, weil es hier wirklich eine Einheit giebt, welche congruent der ganzen Zahl c ist, Mod λ, ohne eine λ^{te} Potenz einer anderen Einheit zu sein. 3. Für die Ausnahmszahlen ist der Ausdruck $\frac{D}{\Delta}$ nicht nothwendig durch λ theilbar, ich gehe ja sogar darauf aus zu beweisen, daß dieser zweite Faktor der Formenanzahl niemals also auch für keine der bekannten Ausnahmszahlen durch λ theilbar ist.

Wenn Du mir schreibst „vermuthest Du nicht ferner, daß grade für alle Zahlen λ deine Voraussetzung I stattfände und deshalb auch überall $\frac{D}{\Delta}$ nicht durch λ theilbar sei?" so liegt hierin ein großer Irrthum deinerseits, denn das steht felsenfest: Wenn für eine Ausnahmezahl λ die Voraussetzung I Statt hat, so ist allemal auch $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar. Wenn die n^{te} Bernoullische Zahl wo $n < \frac{\lambda - 1}{2}$ durch λ theilbar ist, γ eine primitive Wurzel von λ, so ist allemal

$$e(\alpha)e(\alpha^{\gamma})^{\gamma^{-2n}}e(\alpha^{\gamma^2})^{\gamma^{-4n}}\dots e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{\gamma^{-2(\mu-1)n}} \equiv c, \quad \text{Mod}\ \lambda, \quad \left(\mu = \frac{\lambda - 1}{2}\right)$$

wäre aber

$$e(\alpha)e(\alpha^{\gamma})^{\gamma^{-2n}}\ldots e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{\gamma^{-2(\mu-1)n}} = E(\alpha)^{\lambda}$$

so wäre $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar.

Deine auf dieser falschen Ansicht beruhenden Folgerungen fallen somit von selbst weg. Ich gedenke vielmehr den Beweis des FERMATschen Satzes auf folgendes zu gründen:

1. Auf den noch zu beweisenden Satz, daß es für die Ausnahmszahlen λ stets Einheiten giebt, welche ganzen Zahlen congruent sind für den Modul λ, ohne darum λ^{te} Potenzen anderer Einheiten zu sein, oder was dasselbe ist, daß hier niemals $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar wird.
2. Daß es aber für diese Ausnahmszahlen λ niemals eine Einheit giebt, welche congruent einer ganzen Zahl ist, für den Modul λ^2, ohne eine λ^{te} Potenz einer anderen Einheit zu sein.

Für den Fall, daß es einige Zahlen n, n', n'', giebt welche $< \frac{\lambda-1}{2}$ sind und für welche alle $B_n \equiv 0$ $B_{n'} \equiv 0$, $B_{n''} \equiv 0$ ist mod λ, kann ich leicht beweisen, wenn gesetzt wird

$$m(\beta) = 1 + \gamma^{-2n}\beta + \gamma^{-4n}\beta^2 + \cdots + \gamma^{-2(\mu-1)n}\beta^{\mu-1}$$

und analog

$$m'(\beta) = 1 + \gamma^{-2n'}\beta + \gamma^{-4n'}\beta^2 + \cdots + \gamma^{-2(\mu-1)n'}\beta^{\mu-1},$$

und ebenso

$$m''(\beta) = 1 + \gamma^{-2n''}\beta + \cdots$$

daß immer

$$e(\alpha)^{r\cdot m(\beta)}\cdot e(\alpha)^{r'\cdot m'(\beta)}\cdot e(\alpha)^{r''\cdot m''(\beta)}\cdots \equiv c \text{ Mod } \lambda \text{ ist,}$$

wo r, r', r'' beliebige ganze Zahlen sind. Die Einheit

$$e(\alpha)^{r\cdot m(\beta)}\cdot e(\alpha)^{r'\cdot m'(\beta)}\cdot e(\alpha)^{r''\cdot m''(\beta)}\cdots$$

kann aber niemals eine λ^{te} Potenz einer anderen Einheit werden, wenn nicht $e(\alpha)^{r\cdot m(\beta)}$, $e(\alpha)^{r'\cdot m'(\beta)}$, $e(\alpha)^{r''\cdot m''(\beta)}$ einzeln für sich gleich λ^{ten} Potenzen von Einheiten sind. (Sehr wichtiger Satz, welcher eine große Schwierigkeit hebt!)

Dieß wird, glaube ich, Dir über Deine an mich gerichteten Fragen die nöthige Aufklärung geben. Außer diesem hätte ich Dir noch sehr viel zu sagen, aber ich weiß nicht wo ich anfangen soll. Die Untersuchung der Logarithmen complexer Zahlen, oder derjenigen complexen Zahlen, welchen die Logarithmen anderer congruent sind für den Modul λ,

oder λ^2, oder λ^3 etc. habe ich abgeschlossen und auf die einfachsten Ausdrücke gebracht. Hierüber theile ich Dir folgenden Satz mit.

Sei

$$F(\alpha) = A + A_1(\alpha + \alpha^{-1}) + A_2(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + \cdots + A_\mu(\alpha^\mu + \alpha^{-\mu})$$

sei ferner

$$\Psi_r(\alpha) = \alpha + \alpha^{-1} + \gamma^{-2r\lambda}(\alpha^\gamma + \alpha^{-\gamma}) + \gamma^{-4r\lambda}(\alpha^{\gamma^2} + \alpha^{-\gamma^2}) + \cdots$$
$$+ \gamma^{-2(\mu-1)r\lambda}(\alpha^{\gamma^{\mu-1}} + \alpha^{-\gamma^{\mu-1}})$$

(sodaß eigentlich $\Psi_r(\alpha) = (\beta, \alpha)$ ist wenn für β gesetzt wird $\gamma^{-2r\lambda}$).

Sei ferner

$$\Phi(v) = A + 2A_1 \cos v + 2A_2 \cos 2v + \cdots + 2A_\mu \cos \mu v$$

wo v eine Variable ist, so ist

$$\sum_0^{\mu-1}{}_k\, \gamma^{-2r\lambda k}\, l\left(\frac{F(\alpha^{\gamma^k})}{F(1)}\right) \equiv (-1)^r\, \Psi_r(\alpha)\, \frac{d^{2r\lambda}\, l\left(\frac{\Phi(v)}{\Phi(0)}\right)}{dv^{2r\lambda}} \qquad \text{Mod } \lambda^2$$

wenn noch der Differenziation $v = 0$ gesetzt wird.

Diese Congruenz repräsentirt für $r = 1, 2, 3, \ldots \mu - 1$, $\mu - 1$ Congruenzen, aus denen man unmittelbar auch $l\left(\frac{F(\alpha)}{F(1)}\right)$ erhält, wenn man dieses apart zu haben wünscht.

Für den Fall, daß $F(\alpha) = e(\alpha)$ die Kreistheilungs-Einheit ist, wird $\frac{\Phi(v)}{\Phi(0)} = \frac{\sin \gamma \frac{v}{2}}{\gamma \sin \frac{v}{2}}$ und weil die Entwicklung von $l\left(\frac{\sin \gamma \frac{v}{2}}{\gamma \sin \frac{v}{2}}\right)$ nach Potenzen von v bekannt ist, so erhält man unmittelbar

$$\sum_0^{\mu-1}{}_k\, \gamma^{-2r\lambda k}\, l\left(\frac{e(\alpha^{\gamma^k})}{e(1)}\right) \equiv (-1)^{r-1}\, \Psi_r(\alpha)\, \frac{B_{r\lambda}(\gamma^{2r\lambda} - 1)}{2r\lambda} \ldots \quad \text{Mod } \lambda^2.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß $B_{r\lambda}$ (wo $B_{r\lambda}$ die $r\lambda^{\text{te}}$ BERNOUILLIsche Zahl) immer durch λ theilbar ist, (außer für $\lambda = 3$), und daß

$$\frac{B_{r\lambda}}{r\lambda} \equiv \frac{(-1)^\mu\, r B_{r+\mu}}{r+\mu} - \frac{(2r-1) B_r}{r} \quad \text{Mod } \lambda^2 \qquad (r < \mu).$$

Wenn Du mir doch von dieser Congruenz einen einfachen Beweis liefern könntest, und auch einen von der Congruenz

$$\frac{B_r}{r} \equiv \frac{(-1)^\mu B_{r+\mu}}{r+\mu}, \quad \text{Mod } \lambda.$$

Du bist mir auch noch Deinen Ausdruck der BERNOUILLIschen Zahlen schuldig!

Schreibe mir nur ja recht bald wieder über dieses und über alle Deine Observationen in dieser ganzen Sache, denn in Ermangelung mündlicher Unterhaltung mit Dir schreibe ich Dir sehr gern was mich beschäftigt. . . . Bald nach Empfang Deines Briefes, welchen ich erwarte, werde ich Dir einen weiteren Bericht über meine Studien geben; bis dahin lebe wohl. Dein treuer Freund

E. Kummer.

Breslau, den 14. Jan. 1850.

Geliebter Freund!

Indem ich für Deine Mittheilung in dem heutigen Schreiben über die Sätze von den Bernouillischen Zahlen Dir herzlich danke, bemerke ich, daß ich eine ähnliche Art des Beweises wie Du sie mir vorschlägst schon angewendet habe. Ich habe aber die Sache alsdann weit tiefer ergründet und erkannt, daß diese Eigenschaft der Bernouillischen Zahlen eine ganz allgemeine Eigenschaft der Entwicklungs-Coefficienten der Functionen ist. Hier hast Du alles in folgendem Satze.

Lehrsatz: Wenn $\Phi(v)$ eine Function von v ist, welche in eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von $\left(2\sin\frac{v}{2}\right)^2$ geordnete Reihe so entwickelt werden kann, daß die Coefficienten dieser Entwicklung rationale Zahlen sind, in deren Nennern die Primzahl λ nicht als Faktor vorkommt, wenn ferner außerdem

$$\Phi(v) = A + \frac{A_1 v^2}{1\cdot 2} + \frac{A_2 v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ etc.}$$

so ist

$$A_m - (-1)^\mu A_{m+\mu} \equiv 0, \quad \text{Mod } \lambda \qquad \left(\mu = \frac{\lambda - 1}{2}\right)$$

$$A_m - 2\cdot(-1)^\mu A_{m+\mu} + A_{m+2\mu} \equiv 0, \quad \text{Mod } \lambda^2 \qquad \text{wenn } m > 1$$

$$A_m - 3\cdot(-1)^\mu A_{m+\mu} + 3A_{m+2\mu} - (-1)^\mu A_{m+3\mu} \equiv 0, \quad \text{Mod } \lambda^3 \qquad m > 1$$

allgemein

$$A_m - \frac{r}{1}(-1)^\mu A_{m+\mu} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} A_{m+2\mu} - (-1)^\mu \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3} A_{m+3\mu} - \cdots$$

$$\pm A_{m+r\mu} \equiv 0, \quad \text{Mod } \lambda^r \qquad \text{wenn } 2m > r$$

Dieses hat auf die Sekanten-Coefficienten unmittelbare Anwendung.

Auf die BERNOULLIschen Zahlen wende ich es an indem ich

$$\Phi(v) = \frac{d^2 l\left(\dfrac{\sin\gamma\dfrac{v}{2}}{\gamma\sin\dfrac{v}{2}}\right)}{dv^2}$$

nehme (γ primitive Wurzel von λ). Außerdem kann man noch manches damit machen.

Die Congruenz der BERNOULLIschen Zahlen

$$\frac{B_{n\lambda}}{n\lambda} \equiv (-1)^{\mu}\frac{2nB_{n+\mu}}{n+\mu} - \frac{(2n-1)B_n}{n}, \quad \text{Mod } \lambda^2$$

entspringt aus einer Wiederholung der Congruenz

$$\frac{B_n}{n} - 2(-1)^{\mu}\frac{B_{n+\mu}}{n+\mu} + \frac{B_{n+2\mu}}{n+2\mu} \equiv 0, \quad \text{Mod } \lambda^2,$$

welche durch den allgemeinen Satz geliefert wird.

Ich halte den allgemeinen Satz welchen ich Dir mitgetheilt habe für ein ganz nettes Früchtchen meiner Untersuchungen. Auf die Frucht von 3000 Franks aber werde ich, so weit ich es jetzt übersehe, wohl verzichten müssen, denn ich werde zwar wohl damit zu Stande kommen den FERMATschen Satz weiter zu beweisen auch für die Primzahlen λ, für welche $B_n \equiv 0 \bmod \lambda$ ist und $n < \frac{\lambda-1}{2}$, aber der Beweis wird sich wieder nicht auf alle diese Primzahlen λ erstrecken, es werden hier wieder diejenigen die Ausnahme machen, für welche außerdem $B_{n\lambda} \equiv 0 \bmod \lambda^2$ ist und $B_n \equiv 0$, $n < \frac{\lambda-1}{2}$. Wenn ich dieß erst noch werde ergründet haben, ob es so ist oder nicht, dann werde ich die habsüchtigen Pläne gänzlich fallen lassen, und wieder nur für die Wissenschaft arbeiten, namentlich für die Reciprocitätsgesetze, für welche ich schon neue Ideen gefaßt habe.

Lebe wohl empfiehl mich Deiner lieben Frau und Deinen Eltern freue Dich immer über Deinen kleinen Jungen so recht von Herzen, Du weißt wie hoch auch ich solche Liebe schätze. Die Meinigen sind alle wohl und grüßen herzlich. Dein treuer Freund

E. KUMMER.

Breslau, den 4. Decbr. 1851.

Geliebter Freund!

Ich gratulire Dir zu Deinem Geburtstage und wünsche Dir von Herzen alles Gute sowohl für Dich als für Deine ganze Familie. Namentlich aber wünsche ich Dir außer den allgemeinen Wünschen als Gesundheit, Wohlergehen und dergleichen insbesondere auch Zeit, Zeit für wissenschaftliche Arbeiten und Zeit daß Du einmal Deinen Freund KUMMER ordentlich besuchen könnest, denn ich habe Dich wer weiß wie lange nicht mehr gesehen und in Ruhe gesprochen schon fast seit einem Jahre nicht mehr. Seit ich Dich das letztemal gesehen habe, habe ich wieder eine größere Abhandlung ablaufen lassen, und ich hätte sehr gewünscht, sie Dir vorher einmal zeigen zu können. Eine genaue Entwicklung ihres Inhalts und der Fortschritte in der Erkenntniß der Reciprocitätsgesetze, die sie enthält, kann ich Dir nur mündlich geben. Hier theile ich Dir die Ueberschriften der fünf Paragraphen mit, die sie enthält. Der erste Paragraph enthält die Bestimmung der Symbole $\left(\frac{\lambda}{f(\alpha)}\right)$, $\left(\frac{1-\alpha^{\varkappa}}{f(\alpha)}\right)$, $\left(\frac{\varepsilon(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ für den Fall daß $f(\alpha)$ eine ideale complexe Primzahl von der Art ist, daß $Nf(\alpha) = p$ eine Primzahl der Form $n\lambda + 1$ ist. Es ist dieser Paragraph die Ausführung dessen, was ich in meiner letzten Mittheilung an die Academie in Berlin im Abrisse gegeben habe. Der zweite Paragraph führt den Titel: Eine Erweiterung der Theorie der Kreistheilung. Die durch die Kreistheilung erzeugten complexen Zahlen enthalten bekanntlich alle nur Primfactoren der realen Primzahl p von der Form $n\lambda + 1$. Hier aber erzeuge ich auf ganz analoge Weise complexe Zahlen welche nur complexe Primfactoren des q enthalten, wo q eine zu irgend einem Exponenten t gehörende Primzahl ist, $q^t \equiv 1$, Mod λ. Die dem $\psi_r(\alpha)$ der Kreistheilung entsprechenden Zahlen dieser neuen Methode haben die analogen Eigenschaften wie diese und das analoge Bildungsgesetz. Der dritte Paragraph giebt, auf die im vorigen § entwickelte Methode sich stützend, die Bestimmungen der Symbole $\left(\frac{\lambda}{f(\alpha)}\right)$, $\left(\frac{1-\alpha^{\varkappa}}{f(\alpha)}\right)$, $\left(\frac{E(\alpha)}{f(\alpha)}\right)$ für den allgemeinen Fall daß $f(\alpha)$ ein beliebiger idealer Primfactor ist, doch allgemein ein Primfactor einer Primzahl q, welche zum Exponenten t gehört für den Modul λ. Dieser Paragraph ist, so wie der vorhergehende ganz neuen Ursprungs. Der vierte Paragraph enthält meine, Dir bekannte Methode die Logarithmen der complexen Zahlen für den Modul λ oder λ^n zu entwickeln und anzuwenden.

Der fünfte Paragraph enthält eine Anwendung der gefundenen Resultate auf das allgemeine Reciprocitätsgesetz, bestehend in der vollständigen Lösung der bestimmten Aufgabe. Wenn das Reciprocitäts-Verhältniß zweier complexen Primzahlen in der primären Form derselben (nach meiner Definition des Primären) als gegeben angesehen wird, daraus das Reciprocitäts Verhältniß derselben beiden Zahlen zu finden, wenn dieselben nicht primär sondern beliebig mit Einheiten belastet sind. Das Resultat dieser Aufgabe ist sehr merkwürdig, nämlich wie folgt: Wenn $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ zwei beliebige complexe Zahlen sind, $f_1(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$ dieselben in der primären Form, so ist

$$\frac{\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right)}{\left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right)} = \frac{\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right)}{\left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right)} \cdot \alpha^{\Sigma}$$

wo

$$\Sigma = \frac{d_0^2 l f(e^v)}{dv^2} \cdot \frac{d_0^{\lambda-2} l \varphi(e^v)}{dv^{\lambda-2}} - \frac{d_0^3 l f(e^v)}{dv^3} \cdot \frac{d_0^{\lambda-3} l \varphi(e^v)}{dv^{\lambda-3}} + \frac{d_0^4 l f(e^v)}{dv^4} \cdot \frac{d_0^{\lambda-4} l \varphi(e^v)}{dv^{\lambda-4}}$$

$$- \cdots\cdots - \frac{d_0^{\lambda-2} l f(e^v)}{dv^{\lambda-2}} \cdot \frac{d_0^2 l \varphi(e^v)}{dv^2};$$

die Differentialquotienten für den Werth $v = 0$ genommen.

NB. Wenn $f(\alpha)$ oder $\varphi(\alpha)$ ideal sind, so ist dafür $\sqrt[h]{(f(\alpha)^h)}$ zu nehmen wo $f(\alpha)^h$ wirklich ist. Ebenso in den Differentialquotienten $\frac{d_0^{\nu} l f(e^v)}{dv^{\nu}}$ etc.

Wenn das von mir gefundene Reciprocitäts-Gesetz richtig ist, nach welchem $\left(\frac{f_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)}\right)$, so ist allgemein für beliebige complexe Primzahlen, die nicht primär sind

$$\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right) = \left(\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)}\right) \cdot \alpha^{\Sigma}$$

Nach meiner Vermuthung stimmt dieses mit dem EISENSTEINschen Resultate im 39. Bande von CRELLES Journal überein, wo es jedoch weder in seiner einfachsten noch besten Gestalt so verworren dargestellt ist, daß es schwer fällt die Übereinstimmung zu ergründen. EISENSTEIN hätte, wenn dieß wahr ist, durch seine Methode also wirklich mein einfaches Reciprocitätsgesetz finden können, wenn er es geschickter angefangen hätte und wenn er etwas mehr von dem Einflusse der Einheiten auf die complexen Zahlen gewußt hätte. Seine Bedingungen aber, die er dafür angiebt, daß die einfache Reciprocität zwischen zwei Zahlen Statt habe, sind zwar nicht falsch aber unerfüllbar.

Ein Concept der ganzen Abhandlung wird dir vorgelegt werden sobald Du einmal zu mir kommst. Jetzt nur noch die Nachricht, daß ich gestern einen großen schwarz gesiegelten Brief erhalten habe, aus welchem ein Schreiben mit einem breiten schwarzen Trauerrande sich entwickelte, nebst einem Diplome. Die Trauer bezog sich auf den seeligen ERNST AUGUST von Hannover, das Diplom, mit GAUSS Unterschrift, ernennt mich zum correspondirenden Mitgliede der Göttinger Akademie. Lebe wohl empfiehl mich Deiner lieben Frau und besuche bald einmal Deinen Freund

E. KUMMER.

Breslau, den 2. Jan. 1852.

Geliebtester Freund!

Ich bin Dir sehr dankbar für Deine interessanten mathematischen Mittheilungen, durch welche, wenn ich sie ein halbes Jahr eher erhalten hätte, meine neue Redaction der Theorie der complexen Zahlen, die in LIOUVILLE erscheinen soll, nicht unbedeutend hätte abgekürzt und verbessert werden können. Besonders begierig aber bin ich auf den versprochenen Beweis, daß in $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ eine der Zahlen x, y, z durch λ theilbar sein muß. Ein allgemeiner Beweis dieses Satzes existiert noch nicht. Meine Voraussetzung daß λ nicht eine Ausnahmszahl sei, daß B_n nicht $\equiv 0$ Mod λ sei für einen der Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots \frac{\lambda-3}{2}$, ist von CAUCHY schon dahin zurückgeführt, daß die Summe $1^{\lambda-4} + 2^{\lambda-4} + \cdots + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^{\lambda-4}$ nicht durch λ theilbar sei, welches darauf hinausläuft, daß nur $B_{\frac{\lambda-3}{2}}$ nicht $\equiv 0$ Mod λ sein muß, ohne diese Voraussetzung aber geht es nicht. Ich habe dieselbe später noch weiter eingeschränkt, nämlich dahin, wenn nur nicht beide BERNOUILLIschen Zahlen $B_{\frac{\lambda-3}{2}}$ und $B_{\frac{\lambda-5}{2}}$ zugleich durch λ theilbar sind so muß eine der Zahlen x, y, z durch λ theilbar sein, ich kann auch noch mehr Bedingungen hinzufügen, aber ein voraussetzungsloser Beweis ist auch nach meiner Methode nicht hervorgegangen, denn ich kann nicht beweisen, daß $B_{\frac{\lambda-3}{2}}$ niemals durch λ theilbar ist, auch nicht daß keine Zahl λ existirt, für welche $B_{\frac{\lambda-3}{2}}$ und $B_{\frac{\lambda-5}{2}}$ zugleich durch λ theilbar sind.

. . .

Dein Dich herzlich liebender

E. KUMMER.

Breslau d. 12. März 1853.

Geliebtester Freund!

Ich habe mir schon die ganze Woche selbst Vorwürfe gemacht, daß ich Deinen ersten Brief noch nicht beantwortet habe und bin nun doppelt beschämt, daß Du mir noch einen zweiten nachschickst . . . Ueber den Fortschritt Deiner Arbeit freue ich mich so sehr, als ob es meine eigene wäre. Daß die idealen Primzahlen für eine algebraische Untersuchung nicht wesentlich, sondern allenfalls Erleichterungs- und Hilfsmittel sein könnten, war mir eigentlich von vornherein klar. Ich kann es daher nur billigen, daß Du dieselben hier als unwesentlich ausscheidest, namentlich da ohne dieselben der Zweck einfacher erreicht wird. Erst dann, wenn man die gefundenen algebraischen Resultate auf Zahlentheorie wird anwenden wollen, werden dieselben zu ihrem vollen Rechte gelangen, weil dieses ihr eigentlicher Beruf ist, den sie aber auch in so ausgezeichneter Weise erfüllen, daß ich nicht zweifle sie werden eine bleibende Errungenschaft der mathematischen Wissenschaften für alle folgenden Zeiten sein. Daß ich die von Dir gefundenen Resultate für richtig halte, versteht sich von selbst, ich habe nicht den geringsten Grund daran zu zweifeln, wenn auch die rein objective Unzweifelbarkeit erst dann vorhanden ist, wenn man die vollständig ausgearbeiteten Beweise derselben vor sich hat, und wenn man dieselben Schritt für Schritt in seinem eigenen Geiste reproducirt hat. Bis dahin kann man immer noch meinen, daß einem etwas entgangen sein könnte, oder daß irgend eine nothwendige Grundlage der ganzen Schlußfolge fehlen könnte. Die einfachste Form der Wurzeln der ABELschen Gleichungen zu finden, deren Coefficienten bestimmte Irrationalitäten sind, scheint mir vollständig ausgeführt noch eine sehr große Arbeit auszumachen, namentlich wenn Du nicht etwa auch hier eine Methode findest, durch welche das Ideale vermieden wird, denn von den idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreduktiblen Gleichung des n^{ten} Grades gebildet sind, habe ich selbst keine recht klare Vorstellung. Es fällt mir hierbei ein, daß ich Dir noch eine Antwort auf eine früher mir gestellte Frage schuldig bin, wie ein idealer Primfactor als Wurzel einer wirklichen complexen Zahl definirt werden könne. Diese Definition ist höchst einfach die folgende: Wenn man eine wirkliche complexe Zahl $\Phi(\eta)$ hat, wo η Periode von t Gliedern ist, deren Norm, in Beziehung auf die Perioden genommen, gleich der h^{ten} Potenz der Primzahl q ist,

welche zum Exponenten t gehört, und wenn das Produkt

$$\Phi(\eta_1)\,\Phi(\eta_2)\,\ldots\,\Phi\left(\eta_{\frac{p-1}{t}-1}\right)$$

(d. h. das Produkt aller Faktoren der Norm mit Ausschluß eines einzigen), nicht durch q theilbar ist, so ist $\sqrt[h]{\Phi(\eta)}$ ein idealer Primfaktor des q. . . .

Nun lebe wohl, komme bald zu mir, begrenze Dir Deine mathematische Arbeit in der Art, daß sie ein vollständiges Ganze bildet, und daß sie für eine baldige Vollendung nicht zu viel Arbeit erfordert und arbeite dann innerhalb der Dir selbst gesteckten Grenzen bis Du alles vollständig erkannt hast und was Du erkannt hast das arbeite so bald als möglich aus.

Dein

E. Kummer.

Breslau den 24. April 1853.

Geliebtester Freund!

. . . Ueber meine eigenen mathematischen Arbeiten habe ich Dir etwas trauriges zu melden, nämlich eine ganze ziemlich lange Zeit verlorener Mühe. Ich ging an die Ausarbeitung des Beweises des Reciprocitätsgesetzes für conjugirte complexe Primzahlen und war schon mit der Reinschrift für Crelles Journal beschäftigt, als ich ein ganz kleines Versehen bemerkte, als ich demselben weiter nachforschte, entdeckte ich denn, daß dieser Beweis wirklich nicht für alle Primzahlen giltig ist, sondern nur für diejenigen, für welche Ind $E_n(\alpha)$ nicht congruent Null ist, obgleich meine Zahlenbeispiele, die ich für diesen Zweck noch besonders zahlreich gemacht habe, immer die Richtigkeit des Reciprocitätsgesetzes zeigen. Hiermit hängt auch zusammen, daß eines meiner Hauptresultate, auf welches ich seit einem Vierteljahre gebaut hatte, daß der zweite Faktor der Klassenzahl $\frac{D}{\Delta}$ niemals durch λ theilbar ist, falsch ist oder wenigstens unbewiesen. Das ganz kleine Versehen, welches dieses alles hervorgebracht hatte, besteht nämlich lediglich darin, daß ich Einheiten $E(\alpha, \eta)$ deren Normen in Beziehung auf die Perioden genommen wirklich nicht gleich Eins sind, sondern Einheiten $E(\alpha)$, dem zu bildenden Ausdrucke $P\varepsilon(\alpha, \eta)$ zu Grunde gelegt hatte in der Meinung daß $N_\eta\,\varepsilon(\alpha, \eta) = 1$ sei, nämlich in den Fällen, wo die Kreistheilungs-Einheiten in diesem Ausdrucke nicht

den erwünschten Erfolg geben und wo immer fundamentalere Einheiten existiren. Daß diese dann wirklich existiren ist ganz richtig, aber leider eben so richtig, daß sie zwar an sich recht schöne Einheiten sind aber die hier nothwendige Eigenschaft nicht besitzen, daß ihre Normen in Beziehung auf die Perioden allein genommen schon gleich Eins sein müssen. Einen Fortschritt der Erkenntniß habe ich auch durch diese Enttäuschung gemacht, welche mir noch lange verborgen geblieben wäre, wenn ich nicht daran gegangen wäre meine gefundenen Resultate vollständig auszuarbeiten. Ich habe ferner hieraus ersehen, daß meine Ausdrücke $P\varepsilon(\alpha, \eta)$ so schön sie auch sind, doch für einen hinreichenden Beweis des Reciprocitätsgesetzes nicht ausreichen, daß ich also wenn ich diese Aufgabe, die mich seit langer Zeit beschäftigt, nicht ganz will fallen lassen, andere fruchtbare neue Gedanken fassen muß, welches eine Sache ist, die ich nicht in meiner Gewalt habe. Ich werde also vorläufig hauptsächlich meinen Fleiß nur auf die Weiterführung der Theorie der complexen Zahlen wenden, und dann sehen, ob etwas daraus entsteht, was auch über jene Aufgabe Licht verbreitet. . . .

Dein

E. Kummer.

Berlin den 29. Nov. 1856.

Geliebtester Freund!

. . . Mit Deinen mathematischen Arbeiten hast Du eine getäuschte Erwartung gehabt aber eine Erkenntniß gewonnen, also doch einen Fortschritt gehabt. Uebrigens betrifft diese getäuschte Erwartung ja nur einen untergeordneten Punkt, denn so viel ich verstanden habe wird dadurch Deine Aussicht in den Abelschen Transcendenten die wahren auflösenden Gleichungen für alle Grade, namentlich für den 5ten Grad in den Modulargleichungen der elliptischen Functionen zu finden, nicht alterirt. Ehe ich Dir etwas Näheres über den Zusammenhang der Einheiten $e(z)$ mit den ambigen Einheiten $e(w)$ schreibe muß ich Dir mittheilen, daß ich ein Avancement gehabt habe, indem ich in der Göttinger Akademie vom correspondierenden zum auswärtigen Mitgliede befördert worden bin. Du weißt in welchem Sinne ich so etwas auffasse, es macht mir manchmal etwas bange, weil ich meine Verdienste zu meinen Ehren auch ohne weitere Beförderungen schon im richtigen Verhältniß weiß, so besorge ich es könnte dieses richtige

Verhältniß durch weitere Beförderung gestört werden, oder es möchten mir daraus Verpflichtungen erwachsen, denen zu genügen ich nicht im Stande bin.

Nun über die Einheiten. Jede Einheit $e(z)$ hat wie jede wirkliche Zahl $f(z)$ die Eigenschaft, daß $Ne(z) \equiv c \mod \lambda$ wo c eine nicht complexe weder z noch α enthaltende ganze Zahl ist; weil nun $Ne(z)$ auch $= E(\alpha)$ ist also $E(\alpha) \equiv c \mod \lambda$, so muß $E(\alpha)$ eine λ^{te} Potenz einer Einheit sein, also $Ne(z) = \varepsilon(\alpha)^{\lambda}$ darum ist $\frac{e(z)}{\varepsilon(\alpha)}$ eine Einheit $e(z)$ deren Norm gleich Eins ist. Nun ist, wenn

$$Pe(z) = 1 + \alpha^{r} e(z) + \alpha^{2r} e(z) e(z_1) + \cdots + \alpha^{(\lambda-1)r} e(z) e(z_1) \cdots e(z_{\lambda-2})$$

$$e(z) \cdot Pe(z_1) = Pe(z), \quad \text{also } e(z) = \frac{Pe(z)}{Pe(z_1)}.$$

Ich stelle $Pe(z)$ als durch w ausgedrückt dar, so treten aus demselben gewisse Factoren $1 - \alpha$ heraus. Sei

$$Pe(z) = \varrho^{x} F(w)$$

so ist

$$Pe(z_1) = \varrho^{x} F(w\alpha)$$

also

$$e(z) = \frac{F(w)}{F(w\alpha)}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor daß $F(w)$, nachdem die mit $F(w\alpha)$ gemeinschaftl. Factoren, welche nur α enthalten, hinweggehoben sind, nur noch von der Art sein kann, daß $NF(w)$ nichts als $1 - \alpha$ und die Factoren von w^{λ} enthält. Ich zeige ferner, daß wenn w^{λ} nur Potenz einer Primzahl $f(\alpha)$, ist $NF(w)$ den Factor $f(\alpha)$ nicht enthält, wenn man in $Pe(z)$ die simple Einheit α^{r} richtig bestimmt, und zweitens daß $NF(w)$ nicht durch $\varrho = 1 - \alpha$ theilbar sein kann, sodaß $F(w)$ nichts als eine Einheit $E(w)$ ist, und zwar eine ambige, weil

$$e(z) = \frac{E(w)}{E(w\alpha)}.$$

Ich bin damit beschäftigt in ähnlicher Weise von jeder Einheit $e(w)$ deren Norm gleich Eins ist (oder was dasselbe ist $Ne(w) = E(\alpha)^{\lambda}$) zu einer Einheit $\varepsilon(w)$ zurückzusteigen

$$e(w) = \frac{\varepsilon(w)}{\varepsilon(w\alpha)}$$

welche Zurücksteigung zu fundamentaleren Einheiten so weit fortzusetzen sein wird, bis man auf eine Einheit $\varepsilon(w)$ kommt, deren Norm eine Einheit $\varepsilon(\alpha)$ ist welche nicht eine λ^{te} Potenz ist. Es fehlt mir

dazu einzig und allein nur der vollkommene Beweis des Satzes daß wenn $Ne(w) = 1$ ist, $e(w) = 1 + (1 - w)\Phi(w)$ sein muß, ein Satz den ich für durchaus richtig halte, da ich leicht beweisen kann, daß wenn $Ne(w) = 1$ ist, und man setzt $e(w) = 1 + \Psi(w)$, die Norm $N\Psi(w) \equiv 0$ mod λ sein muß.

Lebe wohl geliebter Freund empfiehl mich Deiner Frau und Mutter und nimm die herzlichsten Grüße von meiner Frau.

Dein

E. Kummer.

Berlin d. 10. Decbr. 1856.

Geliebtester Freund!

. . . In meinen mathematischen Studien habe ich wieder manches ergründet und dabei unter andern auch gefunden, daß die Art und Weise wie ich aus der wirklichen Darstellung der unabhängigen ambiguae das Reciprocitätsgesetz für 5te Potenzreste bewiesen habe, eben nur für die 5ten Potenzreste anwendbar ist, für die höheren aber nicht. Der Grund hiervon liegt darin, daß wenn für das allgemeine $\lambda > 5$ und wenn $a^\lambda = D(\alpha)$ nur eine einzige Primzahl enthält oder eine Potenz einer einzigen, von den $\frac{\lambda - 1}{2}$ unabhängigen ambiguis nur die zwei auf der Hand liegenden, nämlich w und $1 - w$ nicht dem Genus principale angehören, alle übrigen aber nothwendig dem Genus principale angehören, da sie sogar die Form haben

$$f(w) = a + \varrho\,\Phi(w), \text{ also } Nf(w) \equiv a^\lambda \mod \lambda$$

für dieselben ist, so daß die Charaktere alle $= 0$ sind. Uebrigens muß ich bemerken, daß mir zum vollen Beweise dieses nicht grade angenehmen Factums noch das Niederschreiben oder Ausarbeiten des im Kopfe fertigen fehlt und daß doch noch vielleicht ein Loch für andere ambiguas gelassen sein könnte, welches mir entgangen wäre und welches sich noch beim Ausarbeiten ergeben könnte. Ich habe nämlich jenes System von $(\lambda - 1) + (\lambda - 2) + (\lambda - 3) + \cdots + 2 + 1$ Congruenzen jetzt gebändigt, wenn auch nur für den Fall, auf den hier zunächst alles ankommt, nämlich wo alle diese Congruenzen nur in Beziehung auf den einfachen Modul ϱ betrachtet werden. Es ist mir so mit meiner Untersuchung ähnlich ergangen wie Dir mit der

Deinen, aber ich lasse darum auch den Muth eben so wenig sinken als Du. Ich habe noch die feste Ueberzeugung daß ich in meiner jetzigen Arbeit die Ingredienzien zur Ergründung der Reciprocitätsgesetze besitze, und daß es wenn nicht auf die erste so doch auf eine andere Weise gelingen wird auch für $\lambda = 7, 11, 13$, etc. aus der Betrachtung der complexen Zahlen $F(z)$ mit Zuziehung der complexen Zahlen $f(w)$ das Reciprocitätsgesetz zu beweisen. Es fehlt nur noch an der vollen Erkenntniß der ambiguae und der mit denselben verwandten Einheiten, darum steuere ich jetzt auf diese los. . . .

Dein

E. Kummer.

Berlin den 6. Juli 1860.

Geliebter Freund!

. . . Ich habe . . . das vollständig ausgearbeitet und ins Reine geschrieben, was ich den nächsten Donnerstag in der Akademie vorzutragen habe: über atmosphärische Strahlenbrechung, dasselbe ist sehr kurz behandelt, so daß es nur für die Monatsberichte eingerichtet ist, wo es etwa einen Bogen füllen wird. Leider kann ich es Dir vor dem Drucke nicht zur Durchsicht vorlegen. In drei Wochen, in unserer nächsten Klassensitzung, will ich noch etwas vortragen, nämlich über die drei Arten von Strahlenbündeln (deren Modelle ich vorzeigen werde), in wiefern dieselben in der Natur wirklich vorkommen. Ich weiß nicht ob ich Dir den Hauptsatz, der dieses vollständig und höchst anschaulich löst, schon mitgetheilt habe. Derselbe lautet etwa so: Wenn einem Krystalle die Wellenfläche $W = 0$ zukommt (welche die Fresnelsche oder das Rotationsellipsoid, oder jede andere sein kann), so denke man sich diese Wellenfläche in beliebiger Größe um den Krystall herum passend beschrieben (so daß die Axen die richtige Lage haben). An einem beliebigen Punkte der Wellenfläche denke man sich den unendlich kleinen Dupinschen Kegelschnitt, die Indikatrix und für diesen irgend zwei conjugirte Durchmesser, so sind die beiden Ebenen, welche durch den Mittelpunkt der Wellenfläche und durch diese beiden conjugirten Durchmesser hindurchgelegt werden, die Fokalebenen eines Strahlenbündels, welches in der betreffenden Richtung (d. h. in der Richtung vom Mittelpunkte des Dupinschen Kegelschnitts nach dem Mittelpunkte der Wellenfläche) im Krystalle wirklich existiert und durch ein passend angebrachtes auf

den Krystall auffallendes normales Strahlenbündel im Krystalle hervorgebracht werden kann. In der betreffenden Richtung existiert auch kein anderes Strahlenbündel im Krystalle als ein solches dessen Fokalebenen aus der Wellenfläche diese conjugirten Richtungen ausschneiden. Ist die Indikatrix eine Hyperbel, so finden auch imaginäre conjugirte Richtungen Statt, also auch Strahlenbündel mit imaginären Fokalebenen.

. . Mit herzlichen Grüßen von mir und den Meinen an Dich und Deine Frau

Dein

E. Kummer.

Berlin, d. 2. Decbr. 1860 (Abends).

Geliebter Freund!

Das Produkt

$$P_z = \sin\frac{2z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 5z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 11z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 12z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 15z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 16z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 23z\pi}{29}\cdot\sin\frac{2\cdot 27z\pi}{29}$$

hat für alle Werthe des $z = 1, 2, 3, \ldots 14$, und darum auch für die übrigen $z = 15, 16, \ldots 28$ stets einen positiven Werth; es wird dieß am leichtesten gezeigt, wenn man die Zahlen 1, 5, 11, 12, 15, 16, 23, 27 nach einander mit $1, 3, 3^2, 3^3 \ldots$ multiplicirt statt mit 1, 2, 3, 4 . . . und die Vielfachen von 29 wegläßt. Man erhält so:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
1, & 5, & 11, & 12, & \underline{15}, & \underline{16}, & \underline{23}, & \underline{27}, & -4 & \text{neg.}\\
3, & \underline{15}, & 4, & 7, & \underline{16}, & \underline{19}, & 11, & \underline{23}, & -4 & \text{,,}\\
9, & \underline{16}, & 12, & \underline{21}, & \underline{19}, & \underline{28}, & 4, & 11, & -4 & \text{,,}\\
\underline{27}, & \underline{19}, & 7, & 5, & \underline{28}, & \underline{26}, & 12, & 4, & -4 & \text{,,}\\
\underline{23}, & \underline{28}, & \underline{21}, & \underline{15}, & \underline{26}, & \underline{20}, & 7, & 12, & -6 & \text{,,}\\
11, & \underline{26}, & 5, & \underline{16}, & \underline{20}, & 2, & \underline{21}, & 7, & -4 & \text{,,}\\
4, & \underline{20}, & \underline{15}, & \underline{19}, & 2, & 6, & 5, & \underline{21}, & -4 & \text{,,}\\
12, & 2, & \underline{16}, & \underline{28}, & 6, & \underline{18}, & \underline{15}, & 5, & -4 & \text{,,}\\
7, & 6, & \underline{19}, & \underline{26}, & \underline{18}, & \underline{25}, & \underline{16}, & \underline{15}, & -6 & \text{,,}\\
\underline{21}, & \underline{18}, & \underline{28}, & \underline{20}, & \underline{25}, & \underline{17}, & \underline{19}, & \underline{16}, & -8 & \text{,,}\\
5, & \underline{25}, & \underline{26}, & 2, & \underline{17}, & \underline{22}, & \underline{28}, & \underline{19}, & -6 & \text{,,}\\
\underline{15}, & \underline{17}, & \underline{20}, & 6, & \underline{22}, & 8, & \underline{26}, & \underline{28}, & -6 & \text{,,}\\
\underline{16}, & \underline{22}, & 2, & \underline{18}, & 8, & \underline{24}, & \underline{20}, & \underline{26}, & -6 & \text{,,}\\
\underline{19}, & 8, & 6, & \underline{25}, & \underline{24}, & 14, & 2, & \underline{20}, & -4 & \text{,,}
\end{array}$$

Die Zahlen größer als $\frac{29}{2}$ geben negative Sinus, die übrigen positive, die Anzahl der negativen, welche unterstrichen sind, ist stets eine grade.

Du wirst vielleicht längst selbst gefunden haben, daß die Bedingung, nach welcher die Kreistheilungseinheiten die ein Quadrat einer Einheit geben sollen stets positiv für alle conjugirten sein müssen nichts weiter ergiebt, als das uns beiden bekannte, daß, wenn

$$\varepsilon(\alpha)^2 = e(\alpha)^{m(\beta)} = e(\alpha)^m e(\alpha^\gamma)^{m_1} \dots e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{m_{\mu-1}}$$

gesetzt wird, wo $e(\alpha)$ die Kreistheilungseinheit ist, und β irgend eine Wurzel der Gleichung $\beta^\mu = -1$ $\left(\mu = \frac{\lambda - 1}{2}\right)$, $m(\beta)$ einen idealen oder wirklichen Primfaktor von 2 enthalten muß. Aus der Forderung, daß

$$e(\alpha^{\gamma^h})^m e(\alpha^{\gamma^{h+1}})^{m_1} e(\alpha^{\gamma^{h+2}})^{m_2} \dots e(\alpha^{\gamma^{h+\mu-1}})^{m_{\mu-1}}$$

für alle Werthe des h positiv sein soll habe ich direct gefolgert, daß

$$m + m_1\beta + m_2\beta^2 + \dots + m_{\mu-1}\beta^{\mu-1}$$

einen complexen Primfactor von 2 enthalten muß, aber umgekehrt findet dieser Satz nicht Statt, sondern nur der folgende:

Wenn $b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \dots + b_{\mu-1}\beta^{\mu-1}$, einen complexen Primfactor von 2 enthält, (wo $b_0, b_1, \dots b_{\mu-1}$ dieselben Zahlen sind, wie in meinem Memoir, nämlich $\lambda b_\varkappa = \gamma\gamma_{\varkappa-1} - \gamma_\varkappa$ und die primitive Wurzel γ ungerade angenommen ist) so kann man stets die Exponenten $m, m_1, \dots m_{\mu-1}$ so bestimmen, daß

$$e(\alpha)^m e(\alpha^\gamma)^{m_1} \dots e(\alpha^{\gamma^{\mu-1}})^{m_{\mu-1}}$$

mit allen seinen conjugirten stets positiv ist. Es folgt hieraus auch, daß dieß niemals der Fall ist, wenn nicht der erste Faktor der Klassenanzahl durch 2 theilbar ist. Darum habe ich als schlagendes Beispiel nur $\lambda = 29$ nehmen müssen.

Ich habe übrigens dieß alles in den zwei Stunden ergründet, die seit der Absendung meines ersten Stadtpostbriefes an Dich verflossen sind, woraus Du abnehmen kannst, daß es leicht zu zeigen war.

Lebe wohl, ich erwarte bald Nachricht von Dir.

Dein

E. Kummer.

Berlin, d. 14. Jan. 1861, 12 Uhr früh.

Geliebter Freund!

Mit herzlichem Danke für Deine Mittheilung, die ich soeben erhalte, melde ich Dir, daß ich gestern Abend das was Du andeutest vollständig ausgeführt habe. Der Ausdruck der Klassenanzahl für compl. Zahlen aus n^{ten} Einheitswurzeln ist wenn $n = p^{\tau} p_1^{\tau_1} p_2^{\tau_2} \ldots$ (den Fall wo n gerade ist habe ich vorläufig bei Seite liegen lassen) ist folgender

$$H = \frac{(p-1)^{\theta}(p_1-1)^{\theta_1}\ldots}{(p^{\tau}-1)^{\theta}(p_1^{\tau_1}-1)^{\theta_1}\ldots} \cdot \frac{P}{2n^{\frac{1}{2}\varphi(n)-1}} \cdot \frac{D}{\Delta}$$

$$\text{wenn } p \text{ zum Exp. } \tau \text{ gehört mod } \varphi\left(\frac{n}{p^{\tau}}\right) \quad \tau\theta = \varphi\left(\frac{n}{p^{\tau}}\right)$$

$$\text{,, } \quad p_1 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \tau_1 \quad \text{,,} \quad \text{mod } \varphi\left(\frac{n}{p_1^{\tau_1}}\right) \quad \tau_1\theta_1 = \varphi\left(\frac{n}{p_1^{\tau_1}}\right)$$

etc. etc.

$$P = \Pi \Sigma_m \alpha^{c \,\mathrm{ind}\, m} \alpha_1^{c_1 \mathrm{ind}_1 m} \alpha_2^{c_2 \mathrm{ind}_2 m} \ldots m$$

wo das Produktzeichen Π auf alle Werthverbindungen der c, c_1, $c_2 \ldots$ geht für

$$c = 0, 1, 2, \ldots, \varphi(p^{\tau}) - 1, \quad c_1 = 0, 1, 2, \ldots \varphi(p_1^{\tau_1}) - 1, \text{ etc.}$$

für welche $c + c_1 + c_2 \ldots$ ungrade ist, α prim. Wurzel von $\alpha^{\varphi(p^{\tau})} = 1$ etc. m alle Zahlen kleiner als n u. rel. Prz. zu n.

Es ist ganz angenehm so alles unter einem Hute zu haben, nur der erste Faktor, der nicht das n sondern das p, p_1, p_2 einzeln enthält, ist störend. Zum Rechnen aber ist diese Form nicht wohl zu gebrauchen, weil die im P enthaltenen überflüssigen Faktoren zu störend sind. Dein E. Kummer.

Berlin, den 25. Juli 1862.

Geliebter Freund!

.. Ich habe Dir nun einige wissenschaftliche Mittheilungen zu machen, aber nicht über meine eigenen Arbeiten, die keine nennenswerthen Ergebnisse gebracht haben, sondern mehr litterarische. Salmon in Dublin hat eine Geometry of three dimensions herausgegeben, welche ich mir angeschafft habe und in welcher ich mit Fleiß und mit Lust studire. Ich finde darin vielfach Aufschlüsse grade über die Fragen

die für mich ein besonderes Interesse haben, unter andern auch über die Theorie der algebraischen Kurven doppelter Krümmung und die damit zusammenhängenden algebraischen Fragen. SALMON stützt diese Theorie auf einen sehr einfachen Satz, der aber bei ihm nicht hinlänglich bewiesen wird, so daß ich nicht weiß, ob er auch allgemein wahr sein mag, nämlich auf den Satz: Eine Raum-Curve des r^{ten} Grades hat mit einer Fläche des p^{ten} Grades pr Punkte gemein (hat sie mehr mit derselben gemein, so liegt sie ganz auf der Fläche, wenn nämlich Curve und Fläche irreductibel sind). Erschöpfend ist SALMONS Art der Behandlung der algebraischen Raumcurven nicht, aber es ist vieles von dem, was wir damals erörtert haben, sehr nett und einfach entwickelt. Schaffe Dir doch auch dieses Buch gleich an und außerdem vielleicht auch noch die anderen desselben Verfasser treatise on conic sections, und treatise on higher plane curves, die ich besitze, und Lessons on higher Algebra, die ich mir bestellt habe, auf welche er in der Geometrie vielfach verweist und welche nicht bloß die formalen Geschichten von CAYLEY und SYLVESTER, sondern die realeren Fragen behandelt, wie ich aus den Zitaten schließe. Ein anderes Werk desselben Verf. Sermons preached in the chapel of Trinity College wird für uns weniger Interesse haben. . . .

Der Dr. QUINCKE hat eine experimentelle Untersuchung der dünnen optischen Strahlenbündel ausgeführt, in welcher überall nachgewiesen wird, daß meine theoretisch ermittelten Resultate über die Winkel der beiden Fokalebenen in einfach brechenden Medien im einaxigen Kalkspath und im zweiaxigen Aragonit richtig sind; seine beobachteten Winkel weichen von meinen berechneten höchstens um einen halben Grad ab. Er hat mit ausgezeichneter Genauigkeit experimentirt. Seine sehr gut geschriebene Abhandlung hierüber habe ich am vorigen Donnerstag in der Akademie vorgetragen und sie erscheint in den Monatsberichten für den Juli. . . .

Herzliche Grüße an Dich und Deine Frau von den Meinen Dein

E. KUMMER.

Berlin den 10. Juni 1865.

Geliebter Freund!

Die sechs Strahlensysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welche auf einer Fläche vierten Grades mit 16 singulären Punkten liegen, sind in der That so beschaffen, daß ein jedes derselben 16 singu-

läre Punkte hat, von welchen Strahlbüschel ausgehen, welche in den 16 singulären Tangentialebenen liegen. Ein einziges bestimmtes dieser sechs Strahlensysteme hat in jedem der 16 singulären Punkte nur ein Strahlbüschel, welches in einer der 6 durch diesen Punkt gehenden Ebenen liegt, die übrigen fünf Strahlensysteme vertheilen ihre von diesem singulären Punkte ausgehenden Strahlbüschel in die übrigen fünf durch diesen singulären Punkt gehenden sing. Tangentialebenen. Nähert man sich von einem beliebigen Punkte der Fläche ausgehend irgend einem Punkte der Curve in welcher eine singuläre Tangentialebene die Fläche 4ten Grades berührt, so nähern sich die sechs von diesem Punkte ausgehenden, den verschiedenen 6 Systemen angehörenden Strahlen den Richtungen welche nach den 6 in dieser singulären Tangentialebene liegenden singulären Punkten führen, und sobald man in diese Berührungscurve hineintritt, gehen die 6 Strahlen nach diesen sechs singulären Punkten. Diese 6 singulären Punkte sind daher die Mittelpunkte von 6 Strahlbüscheln welche in dieser singulären Tangentialebene liegen und welche den 6 verschiedenen Systemen angehören. Dieß ist die vollständige Lösung der Schwierigkeit, welche wir in unseren Ueberlegungen dieser Sache fanden.

Daß ein jedes System 2ter Ordnung und 2ter Klasse singuläre Punkte mit ebenen Strahlbüscheln haben muß, habe ich a priori noch nicht beweisen können.

Dein treuer Freund

E. Kummer.

Leopold Kronecker an E. Kummer.

Nach Mitternacht des 9. September 1881,
noch in Berlin, Bellevuestr. 13.

Geliebtester Freund!

In der ersten Stunde des Tages Deines Doctor-Jubiläums schreibe ich diese Zeilen, die ich im Laufe des Tages selber in Deine Wohnung tragen will. In der ersten Stunde dieses Tages will ich Dir meinen Glückwunsch aufschreiben, da es mir versagt ist, Dir ihn persönlich zu überbringen. Wie herzlich mein Glückwunsch ist, weißt Du, aber weit mehr als Wunsch — denn Du brauchst ihn kaum — bringe ich Dir Dank! Früh hast Du mir Liebe, dann Freundschaft geschenkt, Du

hast mir mein mathematisches, ja überhaupt den wesentlichsten Theil meines geistigen Lebens gegeben, und so habe ich Dich immer ganz wie einen Vater geliebt und verehrt, und es hat mich gedrängt, meinen Empfindungen der Pietät zu Deinem Gedenktage Ausdruck zu geben. Darum habe ich es unternommen, aus allem meinem mathematischen Denken, das Du mich einst gelehrt, die Summe zu ziehen und eine Festschrift zu Deinem Jubiläum zu veröffentlichen, in welcher die Liebe zu Dir in der Liebe zur Wissenschaft erscheint, der Du mich geweiht hast. Ich habe mit aller Freudigkeit und mit aller Anstrengung und auch mit Erfolg gearbeitet — denn auf den Werken der Liebe und Pietät ruht der Segen! Theuerster Freund, weniger als das Beste, was ich zu leisten vermag, wollte ich Dir nicht widmen; darum habe ich seit Monaten gedanklich geschafft und seit Wochen geschrieben, bis ich nun wirklich zum Tage fertig geworden bin und schon den ersten Druckbogen bei mir habe. . . . Mit der Abhandlung, die ich Dir jetzt zu Deinem Gedenktage widme, und die den Titel hat „Grundzüge eine arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“, erscheint zusammen ein neuer und vervollständigter Abdruck meiner Dir gewidmeten Dissertation. Das früheste und dieses späte Zeichen meiner Liebe und Dankbarkeit sollen verbunden Zeugniß ablegen von der Innigkeit und Stetigkeit derselben, sie sollen die zwei um 36 Jahre auseinanderliegenden Punkte eines seltenen Freundschaftslebens bezeichnen, das einen wesentlichen Theil meines Glückes bildet.

Dein ältester treuer Freund

Leopold Kronecker.



